モデル問題例 3

[1]

(1)

(i)

$OE=\dfrac{5}{3}$ である。

$AE=\dfrac{1}{3}$ なので、$BF=2AE=\dfrac{2}{3}$ である。

$OF=OB+BF$

$=2+\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{8}{3}$

よって、$\triangle \mathrm{FOE}=\dfrac{1}{2}\cdot OE\cdot OF$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{8}{3}$

$=\dfrac{20}{9}$

$S=4\triangle\mathrm{FOE}$

$=4\cdot\dfrac{20}{9}$

$\boxed{=\dfrac{80}{9}}$

(ii)

$AE=x$ とすると、$0\leqq x<2$ である。

(i) と同様に考えて

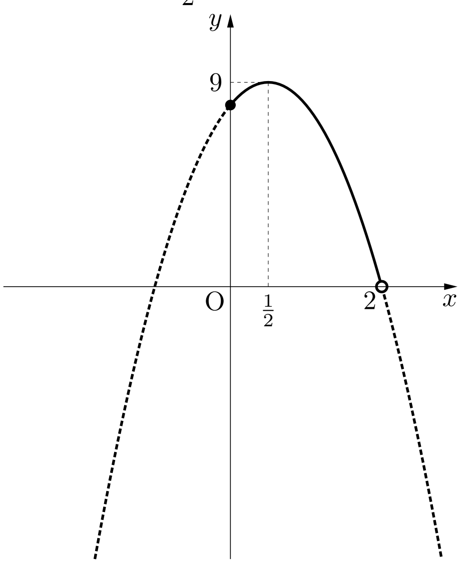
$OE=2-x,\ OF=2+2x$ より

$S=4\cdot\dfrac{1}{2}(2-x)(2+2x)$

$=-4x^2+4x+8$

$=-4(x-\dfrac{1}{2})^2+9$

これは頂点が $(\dfrac{1}{2},9)$ で上に凸の 2 次関数である。



図より、$0\leqq x<2$ の範囲では $\boxed{0<S\leqq 9}$ となる。

(2)

$T=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$

$=8$

E が OA 上にあるときは、(1)(ii) より

$-4x^2+4x+8=8$ を解いて

$x=0,1$

E が A と一致しないときは $x=1$ である。

E が OC 上にあるとき $(2<x\leqq 4)$ は、$OE=x-2$ となるので、(1)(ii) と同様に考えて

$S=4\cdot\dfrac{1}{2}(x-2)(2+2x)$

$=4x^2-4x-8$

$4x^2-4x-8=8$ を解いて

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

$2<x\leqq 4$ より

$x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

以上より

$\boxed{AE=1,\ \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$

(3)

$AE=x$ とすると、(1), (2) と同様に考えて、F が OB 上にあるとき $(0\leqq x<1)$

$S=4\cdot\dfrac{1}{2}(2+x)(2-2x)$

$=-4x^2-4x+8$

F が OD およびその延長上にあるとき $(x>1)$

$S=4\cdot\dfrac{1}{2}(2+x)(2x-1)$

$=4x^2+6x-4$

⓪

$-4x^2-4x+8=8$ を解いて

$x=0,1$

$0\leqq x<1$ より E が A と一致する場合以外には存在しない。

$4x^2+6x-4=8$ を解いて

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{57}}{4}$

$x>1$ より

$x=\dfrac{-3+\sqrt{57}}{4}$

以上より、$S=T$ となるような点 E の x 座標は一つある。

①

$-4x^2-4x+8=16$ を解いて

$x=-1,2$

$0\leqq x<1$ よりこれを満たす x は存在しない。

$4x^2+6x-4=16$ を解いて

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{89}}{4}$

$x>1$ より

$x=\dfrac{-3+\sqrt{89}}{4}$

以上より、$S=2T$ となるような点 E の x 座標は一つだけある。

②

$x>1$ のとき $S=4x^2+6x-4$ であるので S の最大値は存在しない（無限大に発散する）。

③

F が OD およびその延長上にあるとき $(x>1)$

$OE=2+x,\ OF=2x-1$ である。

$2+x=2x-1$ を解いて

$x=3$

このとき $EE'=FF',\ EE'\perp FF'$ となるので、四角形 $EFE'F'$ は正方形になる。

以上より、$\boxed{①,③}$

[2]

(1)

余弦定理より

$t^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cos 60^\circ$

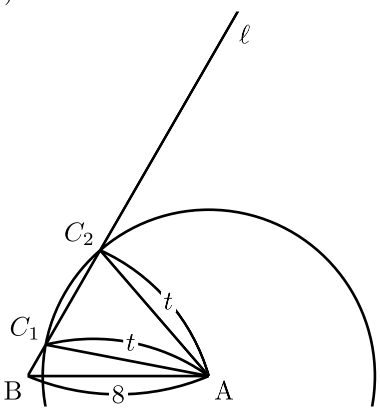
$\boxed{x^2 - 8x + 64 - t^2 = 0}$

(2)

$x > 0$ より、これが異なる二つの正の解をもつような t の値の範囲を求める。

よって解答は $\boxed{①}$

(3)



上図より、点 A を中心とし、半径 t の円が ℓ と異なる 2 点で交わるような t の値の範囲を求める。

よって解答は $\boxed{⓪}$

(4)

(1) と同様に、$BC = x$ とおくと、余弦定理より

$b^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\theta$

$x^2 - 2a\cos\theta x + a^2 - b^2 = 0 \cdots ⊛$

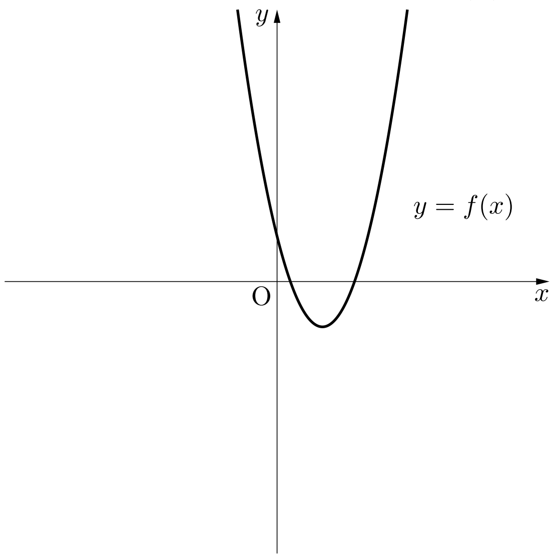
⊛ の判別式を D とする。

また、$f(x) = x^2 - 2a\cos\theta x + a^2 - b^2$ とする。

$f(x)$ は下に凸の 2 次関数であり、軸は $a\cos\theta$ である。

θ は鋭角なので $\cos\theta > 0$ であり、また $a > 0$ であるので、軸は正である。

(ア) ⊛ が異なる二つの正の解をもつような a, b, θ の関係を求める。



このとき、図より、$D > 0$ かつ $f(0) > 0$ である。

$\dfrac{D}{4} = a^2\cos^2\theta - a^2 + b^2 > 0$

$a^2(\cos^2\theta - 1) + b^2 > 0$

$b^2 > a^2(1 - \cos^2\theta)$

$b^2 > a^2\sin^2\theta$

$b > 0, a\sin\theta > 0$ より

$b > a\sin\theta$

$f(0) = a^2 - b^2 > 0$

$a^2 > b^2$

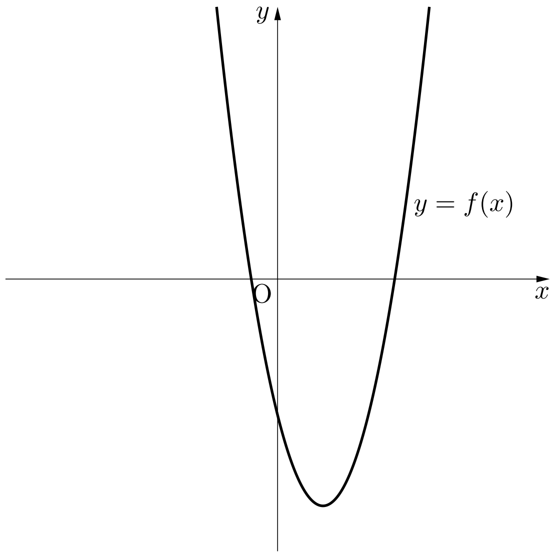
$a > 0, b > 0$ より

$a > b$

以上より、$a\sin\theta < b < a$

(イ) ⊛ が一つだけ正の解をもつような a, b, θ の関係を求める。

(A) ⊛ が正の解と負または 0 の解を一つずつもつ

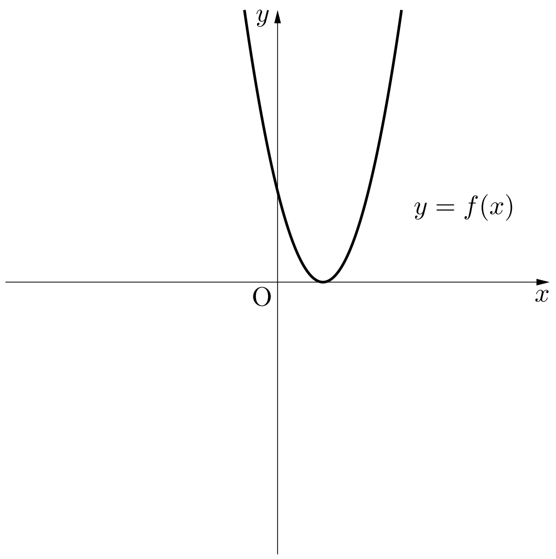


このとき、図より、$f(0) \leqq 0$

(ア) と同様に考えて

$a \leqq b$

(B) ⊛ が正の重解をもつ

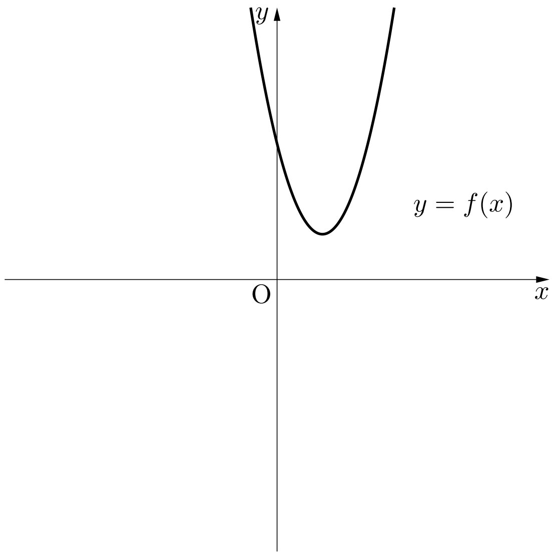


このとき、図より、$D = 0$

(ア) と同様に考えて

$b = a\sin\theta$

(ウ) ⊛ が一つも正の解をもたないような a, b, θ の関係を求める。



このとき、図より、$D < 0$
(ア) と同様に考えて
$b < a\sin\theta$

以上の議論はそれぞれその逆も成り立つので

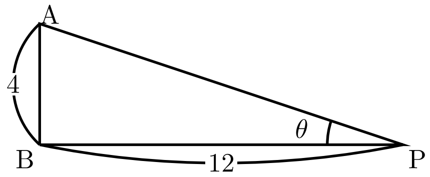
$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < b < a\sin\theta \text{ のとき } 0 \text{ 通り} \\ b = a\sin\theta \text{ のとき } 1 \text{ 通り} \\ a\sin\theta < b < a \text{ のとき } 2 \text{ 通り} \\ b \geqq a \text{ のとき } 1 \text{ 通り} \end{array}}$$

モデル問題例 4

[1]

(1)

求める角を θ とする。



図より、$\tan\theta = \dfrac{4}{12} = 0.333\cdots$

三角比の表より $\tan\theta = 0.333\cdots$ となる θ は 18° と 19° の間なので

解答は $\boxed{⑦}$

(2)

(i)

$\cos\angle\mathrm{APB} > 0$ であれば $\angle\mathrm{APB}$ は鋭角で、

$\cos\angle\mathrm{APB} = 0$ であれば $\angle\mathrm{APB}$ は直角で、

$\cos\angle\mathrm{APB} < 0$ であれば $\angle\mathrm{APB}$ は鈍角である。

余弦定理より

$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2\cdot AP\cdot BP\cdot\cos\angle\mathrm{APB}$

$2\cdot AP\cdot BP\cdot\cos\angle\mathrm{APB} = AP^2 + BP^2 - AB^2$

$\cos\angle\mathrm{APB} = \dfrac{AP^2+BP^2-AB^2}{2\cdot AP\cdot BP}$

よって、$\boxed{\dfrac{AP^2+BP^2-AB^2}{2\cdot AP\cdot BP} \text{ が 0 より大きければ } \angle\mathrm{APB} \text{ が鋭角であることを確かめることができる。}}$

(ii)

その関係式は、正弦定理より

$\boxed{\dfrac{AB}{\sin\angle\mathrm{APB}} = 2R}$

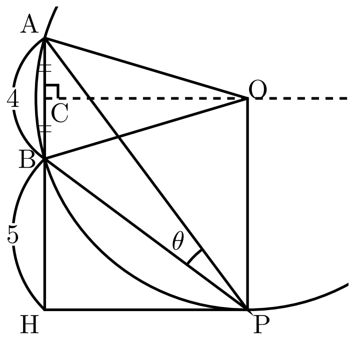
$\sin\angle\mathrm{APB} = \dfrac{AB}{2R}$

AB が一定のとき、R が小さくなればなるほど $\sin\angle\mathrm{APB}$ は大きくなる。そして $\angle\mathrm{APB}$ が鋭角のとき、$\sin\angle\mathrm{APB}$ が大きくなればなるほど、$\angle\mathrm{APB}$ が大きくなる。

(iii)

①

台座の地面から $1.5m$ の点を H、AB の中点を C、見込む角を θ とする。



図より、$R = OP = CH = 2 + 5 = \boxed{7}$

②

(ii) で述べたように、正弦定理より

$\dfrac{4}{\sin\theta} = 14$

$\sin\theta = \dfrac{2}{7} \fallingdotseq 0.286$

三角比の表より、$\sin\theta = 0.286$ となる θ は 16° と 17° の間なので

解答は $\boxed{③}$

③

△AOCにおいて三平方の定理より

$7^2 = 2^2 + CO^2$

$CO^2 = 45$

$CO > 0$ より

$CO = 3\sqrt{5} \fallingdotseq 6.71$

銅像の真下と「ベストスポット」の距離 HP は CO に等しいのでおよそ $6.71m$ である。

よって解答は $\boxed{③}$