円周率公式の証明

2021 年 6 月 21 日

1　はじめに

次の 2 つの円周率公式を証明します.

定理 1.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} \right). \tag{1}$$

定理 2.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right). \tag{2}$$

証明に必要な知識は, ほぼ高校数学のみです. 使用する大学数学は「$\arctan x$ を微分すると $\dfrac{1}{x^2+1}$ になる」だけです. トリッキーな技法は使わず、ひたすら基本的な式変形を繰返します. そして, 定理1及び定理2は同じ流れで証明できます.

2　定理1の証明

松本圭司 (2011) の 20 ページ及びArndt et al. (2001) の式 10.7 を参考にする. 事前準備として、次の補題1及び補題2を証明する.

補題 1. $k = 1, 2, 3$ に対して,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{k-1}}{1+x^4} dx = \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+k)}.$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^4\right)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+k-1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-1)^n x^{4n+k-1} dx \quad \because \text{項別積分より} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{4n+k-1} dx
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{4n+k-1} dx &= \left[\frac{1}{4n+k} x^{4n+k}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{4n+k} \frac{1}{4^n}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{4n+k} \frac{1}{4^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+k)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

以上より補題1が証明された. □

補題 2.

$$
y^4 + 4 = (y^2 + 2y + 2)(y^2 - 2y + 2).
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= (y^2 + 2)^2 - (2y)^2 \\
&= (y^4 + 4y^2 + 4) - 4y^2 \\
&= y^4 + 4 \\
&= (\text{左辺})
\end{aligned}
$$

よって補題2が証明された. □

事前準備ができたので, 定理1を証明する.

定理*1*の証明.

$$
\begin{aligned}
&(\text{式 (1) の右辺}) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\frac{1}{4n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\frac{1}{4n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\frac{1}{4n+3} \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+x^4}dx + 2\cdot 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x}{1+x^4}dx + 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^2}{1+x^4}dx \quad \because \text{補題1より} \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1+x^4}dx \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{1}\frac{1+y+\frac{1}{2}y^2}{1+\frac{1}{4}y^4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}dy\right) \quad \because y=\sqrt{2}x \text{ の置換積分より} \\
&= 4\int_0^1\frac{y^2+2y+2}{y^4+4}dy \\
&= 4\int_0^1\frac{1}{y^2-2y+2}dy \quad \because \text{補題2より} \\
&= 4\int_0^1\frac{1}{(y-1)^2+1}dy \\
&= 4\int_{-1}^0\frac{1}{u^2+1}du \quad \because u=y-1 \text{ の置換積分より} \\
&= 4\left[\arctan u\right]_{-1}^0 \quad \because \arctan \text{ の微分より} \\
&= 4\left(-\arctan(-1)\right) \\
&= \pi \\
&= (\text{式 (1) の左辺}).
\end{aligned}
$$

以上より定理1が証明された. □

3　定理2の証明

Borwein and Bailey (2008) の Theorem 3.1, 円周率.jp (n.d.), 及びPerkins (2018) の式 2.64 を参考にする. 事前準備として、次の補題3及び補題4を証明する.

補題 3. $k=1,4,5,6$ に対して,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^{k-1}}{1-x^8}dx = \frac{1}{\sqrt{2}^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+k)}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^8\right)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{8n+k-1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{8n+k-1} dx \quad \because \text{項別積分より}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{8n+k-1} dx &= \left[\frac{1}{8n+k} x^{8n+k}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{8n+k} \frac{1}{16^n}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{8n+k} \frac{1}{16^n} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+k)} \\
=& (\text{右辺})
\end{aligned}$$

以上より補題3が証明された. □

補題 4.

$$y^5 + y^4 + 2y^3 - 4 = (y-1)(y^2+2)(y^2+2y+2). \tag{3}$$

$$y^8 - 16 = (y^2-2)(y^2+2)(y^2-2y+2)(y^2+2y+2). \tag{4}$$

$$\frac{4(y-1)}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} = \frac{y}{y^2-2} - \frac{y-2}{y^2-2y+2}. \tag{5}$$

Proof.

$$(y-1)(y^2+2) = y^3 - y^2 + 2y - 2$$

なので、

$$\begin{aligned}
(\text{式 (3) の右辺}) &= (y^3 - y^2 + 2y - 2)(y^2 + 2y + 2) \\
&= y^5 + y^4 + 2y^3 - 4
\end{aligned}$$

$$= (\text{式 (3) の左辺}).$$

よって式 (3) が証明された.

$$\begin{aligned}(\text{式 (4) の右辺}) &= (y^2-2)(y^2+2)(y^4+4) \quad \because \text{補題2より} \\ &= (y^4-4)(y^4+4) \\ &= y^8-16 \\ &= (\text{式 (4) の左辺}).\end{aligned}$$

よって式 (4) が証明された.

$$\begin{aligned}(\text{式 (5) の右辺}) &= \frac{y(y^2-2y+2)-(y-2)(y^2-2)}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} \\ &= \frac{(y^3-2y^2+2y)-(y^3-2y^2-2y+4)}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} \\ &= \frac{4y-4}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} \\ &= (\text{式 (5) の左辺}).\end{aligned}$$

よって式 (5) が証明された. □

事前準備ができたので, 定理2を証明する.

定理*2*の証明.

$$\begin{aligned}&(\text{式 (2) の右辺}) \\ &= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+1)} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+4)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+5)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+6)} \\ &= 4\cdot\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-x^8}dx - 2\cdot 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^3}{1-x^8}dx - 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^4}{1-x^8}dx \\ &- 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^5}{1-x^8}dx \quad \because \text{補題3より} \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}dx \\ &= \int_0^1\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}y^3-\sqrt{2}y^4-\sqrt{2}y^5}{1-\frac{1}{16}y^8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}dy\right) \quad \because y=\sqrt{2}x \text{ の置換積分より} \\ &= \int_0^1\frac{4-2y^3-y^4-y^5}{1-\frac{1}{16}y^8}dy\end{aligned}$$

$$= 16\int_0^1 \frac{y^5+y^4+2y^3-4}{y^8-16}dy$$
$$= 16\int_0^1 \frac{(y-1)(y^2+2)(y^2+2y+2)}{(y^2-2)(y^2+2)(y^2-2y+2)(y^2+2y+2)}dy$$
$\because$ 補題4の式 (3) 及び式 (4) より
$$= 16\int_0^1 \frac{(y-1)}{(y^2-2)(y^2-2y+2)}dy$$
$$= 4\int_0^1 \frac{y}{y^2-2} - \frac{y-2}{y^2-2y+2}dy \quad \because \text{補題4の式 (5) より}$$
$$= 4\int_0^1 \frac{y}{y^2-2} - \frac{y-1}{y^2-2y+2} - \frac{(-1)}{y^2-2y+2}dy$$
$$= 4\int_0^1 \frac{y}{y^2-2}dy - 4\int_0^1 \frac{y-1}{y^2-2y+2}dy + 4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy$$
$$= 2\int_0^1 \frac{(y^2-2)'}{y^2-2}dy - 2\int_0^1 \frac{(y^2-2y+2)'}{y^2-2y+2}dy + 4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy$$
$$= 2\left[\log|y^2-2|\right]_0^1 - 2\left[\log|y^2-2y+2|\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy$$
$$= -2\log 2 + 2\log 2 + 4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy$$
$$= 4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy$$
$$= 4\int_0^1 \frac{1}{(y-1)^2+1}dy$$
$$= 4\int_{-1}^0 \frac{1}{u^2+1}du \quad \because u = y-1 \text{ の置換積分より}$$
$$= 4\left[\arctan u\right]_{-1}^0 \quad \because \arctan \text{ の微分より}$$
$$= 4\left(-\arctan(-1)\right)$$
$$= \pi$$
$$= (\text{式 (2) の左辺}).$$

以上より定理2が証明された. $\square$

References

Arndt, J., Haenel, C., Lischka, C., & Lischka, D. (2001). *Pi - Unleashed*. Springer Berlin Heidelberg.

Borwein, J., & Bailey, D. (2008). *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*. CRC Press.

Perkins, D. (2018). *Phi, Pi, e and i*. American Mathematical Society.

円周率.jp. (n.d.). *BBP の公式の証明*. Retrieved June 1, 2020, from http://xn--w6q13e505b.jp/proof/bbp.html

松本圭司. (2011). 円周率 π について. Retrieved June 1, 2020, from http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matsu/pdf/syoutai.pdf