円周率公式の証明 (改訂版)

2021 年 6 月 22 日

1　はじめに

次の 8 つの円周率公式のうち 7 個を証明しました. 最後の 1 つは, 残念ながら私の実力では証明できませんでした.

定理 1.

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}. \tag{1}$$

定理 2.

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n}\left(\frac{3}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right). \tag{2}$$

定理 3.

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right). \tag{3}$$

定理 4.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1}+\frac{2}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}\right). \tag{4}$$

定理 5.

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{4}{6n+1}+\frac{1}{6n+3}+\frac{1}{6n+5}\right). \tag{5}$$

定理 6.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right). \tag{6}$$

定理 7.

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{27}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{81^n}\left(\frac{27}{8n+1}-\frac{9}{8n+3}+\frac{3}{8n+5}-\frac{1}{8n+7}\right). \tag{7}$$

定理 8.

$$\pi = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{8}{8n+2}+\frac{4}{8n+3}+\frac{4}{8n+4}-\frac{1}{8n+7}\right). \tag{8}$$

証明に必要な知識は, ほぼ高校数学のみです. 使用する大学数学は「$\arctan x$ を微分すると $\dfrac{1}{x^2+1}$ になる」だけです. トリッキーな技法は使わず、ひたすら基本的な式変形を繰返します. そして, 7 つの定理は同じ流れで証明できます.

2 定理 1 の証明

定理 1 を 2 通りの方法で証明します.

証明 *1.* Schinazi (2011) の 97 ページを参考にする. arctan のべき級数展開として,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{for all } x \in [-1,1]$$

が知られている. この式に $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入すると,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

上式を整理すると式 (1) になる. 以上より定理 1 が証明された. □

2 つ目の証明の事前準備として、次の補題 1 及び補題 2 を証明する.

補題 1.

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (-1)^n x^{2n} dx \quad \because \text{項別積分より} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{2n} dx.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{2n} dx &= \left[\frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{3^n}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

以上より補題 1 が証明された. □

補題 2.

$$
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{6}.
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= [\arctan x]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \because \arctan \text{の微分より} \\
&= \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

よって補題 2 が証明された. □

事前準備ができたので, 2 つ目の証明を行う.

証明 *2.* 補題 1 及び補題 2 より,

$$
\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.
$$

上式を整理すると, 式 (1) になる. 以上より定理 1 が証明された. □

3　定理 2 の証明

Nimbran (2016) の 11 ページを参考にする．事前準備として, 次の補題 3 を証明する．

補題 3. $k = 1, 3$ に対して,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^{k-1}}{1-x^4} dx = \frac{1}{\sqrt{3}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n(4n+k)}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} (x^4)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+k-1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{4n+k-1} dx \quad \because \text{項別積分より}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{4n+k-1} dx &= \left[\frac{1}{4n+k} x^{4n+k} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}^k} \frac{1}{4n+k} \frac{1}{9^n}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}^k} \frac{1}{4n+k} \frac{1}{9^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n(4n+k)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

以上より補題 3 が証明された．　□

事前準備ができたので, 定理 2 を証明する．

定理 *2* の証明.

$$(\text{式 (2) の右辺}) = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n(4n+1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n(4n+3)}$$

$$
\begin{aligned}
&= 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-x^4}dx - 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2}{1-x^4}dx \quad \because \text{補題 3 より} \\
&= 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-x^2}{1-x^4}dx \\
&= 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \pi \quad \because \text{補題 2 より} \\
&= (\text{式 (2) の左辺}).
\end{aligned}
$$

以上より定理 2 が証明された. □

4　定理 3 の証明

Nimbran (2016) の式 (19) を参考にする. 事前準備として, 次の補題 4 を証明する.

補題 4. $k = 1, 2$ に対して,

$$
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{k-1}}{1+x^3}dx = \frac{1}{2^k}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n(3n+k)}.
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+k-1}dx \\
&= \sum_{0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} (-1)^n x^{3n+k-1}dx \quad \because \text{項別積分より} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\frac{1}{2}} x^{3n+k-1}dx.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} x^{3n+k-1}dx &= \left[\frac{1}{3n+k}x^{3n+k}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2^k}\frac{1}{3n+k}\frac{1}{8^n}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^k}\frac{1}{3n+k}\frac{1}{8^n} \\
&= \frac{1}{2^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n(3n+k)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

以上より補題 4 が証明された. □

事前準備ができたので, 定理 3 を証明する.

定理 3 の証明.

$$
\begin{aligned}
(\text{式 (3) の右辺}) &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n(3n+1)} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n(3n+2)} \\
&= 3\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x^3}dx + 3\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{1+x^3}dx \quad \because \text{補題 4 より} \\
&= 3\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x}{1+x^3}dx \\
&= 3\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2-x+1}dx
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right\}
$$

なので $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ とおいて置換積分すると

$$
\begin{aligned}
(\text{式 (3) の右辺}) &= 3\sqrt{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}\frac{4}{3}\frac{1}{u^2+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}du\right) \\
&= 6\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}\frac{1}{u^2+1}du \\
&= 6\left[\arctan u\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \quad \because \arctan \text{ の微分より} \\
&= 6\left(-\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})\right) \\
&= \pi \\
&= (\text{式 (3) の左辺}).
\end{aligned}
$$

以上より定理 3 が証明された. □

5　定理 4 の証明

松本圭司 (2011) の 20 ページ及びArndt et al. (2001) の式 10.7 を参考にする. 事前準備として、次の補題 5 及び補題 6 を証明する.

補題 5. $k = 1, 2, 3$ に対して,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{k-1}}{1+x^4} dx = \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+k)}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^4\right)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_0^{\infty} (-1)^n x^{4n+k-1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-1)^n x^{4n+k-1} dx \quad \because \text{項別積分より} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{4n+k-1} dx
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{4n+k-1} dx &= \left[\frac{1}{4n+k} x^{4n+k}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{4n+k} \frac{1}{4^n}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{4n+k} \frac{1}{4^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+k)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

以上より補題 5 が証明された. □

補題 6.

$$y^4 + 4 = (y^2 + 2y + 2)(y^2 - 2y + 2).$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= (y^2 + 2)^2 - (2y)^2 \\
&= (y^4 + 4y^2 + 4) - 4y^2 \\
&= y^4 + 4 \\
&= (\text{左辺}).
\end{aligned}$$

よって補題 6 が証明された. □

事前準備ができたので, 定理 4 を証明する.

定理 *4* の証明.

$$\begin{aligned}
&(\text{式 (4) の右辺}) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{1}{4n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{1}{4n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{1}{4n+3} \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+x^4}dx + 2\cdot 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{1+x^4}dx + 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{1+x^4}dx \quad \because \text{補題 5 より} \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1+x^4}dx \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{1} \frac{1+y+\frac{1}{2}y^2}{1+\frac{1}{4}y^4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}dy\right) \quad \because y=\sqrt{2}x \text{ の置換積分より} \\
&= 4\int_0^1 \frac{y^2+2y+2}{y^4+4}dy \\
&= 4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy \quad \because \text{補題 6 より} \\
&= 4\int_0^1 \frac{1}{(y-1)^2+1}dy \\
&= 4\int_{-1}^0 \frac{1}{u^2+1}du \quad \because u = y-1 \text{ の置換積分より} \\
&= 4\left[\arctan u\right]_{-1}^0 \quad \because \arctan \text{ の微分より} \\
&= 4\left(-\arctan(-1)\right) \\
&= \pi \\
&= (\text{式 (4) の左辺}).
\end{aligned}$$

以上より定理 4 が証明された. □

6　定理 5 の証明

Adamchik and Wagon (1996) の 13 ページを参考にする．事前準備として, 次の補題 7, 補題 8, 及び補題 9 を証明する．

補題 7. $k = 1, 3, 5$ に対して,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{k-1}}{1+x^6} dx = \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n(6n+k)}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^6)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{6n+k-1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-1)^n x^{6n+k-1} dx \quad \because \text{項別積分より} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{6n+k-1} dx
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{6n+k-1} dx &= \left[\frac{1}{6n+k} x^{6n+k} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{6n+k} \frac{1}{8^n}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{6n+k} \frac{1}{8^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n(6n+k)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

以上より補題 7 が証明された． □

補題 8.

$$2\frac{2+x^2+2x^4}{1+x^6} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{2}{x^2+1} + \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2-3x^2} \\
&= \frac{2}{x^2+1} + \frac{2(x^2+1)}{x^4-x^2+1} \\
&= 2\frac{(x^4-x^2+1)+(x^2+1)^2}{x^6+1} \\
&= 2\frac{2x^4+x^2+2}{x^6+1} \\
&= (\text{左辺}).
\end{aligned}$$

以上より補題 8 が証明された. □

補題 9.

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1}dx = 2\left(\arctan\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right) \tag{9}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1}dx = 2\left(\arctan\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) \tag{10}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1}dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1}dx = 2\arctan\sqrt{2} \tag{11}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
x^2+\sqrt{3}x+1 &= \left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left((2x+\sqrt{3})^2+1\right).
\end{aligned}$$

なので, $u = 2x+\sqrt{3}$ とおいて置換積分すると,

$$\begin{aligned}
(\text{式 (9) の左辺}) &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{1}{4}(u^2+1)}\left(\frac{1}{2}du\right) \\
&= 2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}du \\
&= 2\left[\arctan u\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \qquad \because \arctan \text{ の微分より}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\arctan\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) - \arctan\sqrt{3}\right) \\
&= 2\left(\arctan\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= (\text{式 (9) の右辺}).
\end{aligned}
$$

よって式 (9) が証明された.

$$
\begin{aligned}
x^2 - \sqrt{3}x + 1 &= \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left((2x-\sqrt{3})^2 + 1\right).
\end{aligned}
$$

なので, $u = 2x - \sqrt{3}$ とおいて置換積分すると,

$$
\begin{aligned}
(\text{式 (10) の左辺}) &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{1}{4}(u^2+1)}\left(\frac{1}{2}du\right) \\
&= 2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}du \\
&= 2\left[\arctan u\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \quad \because \text{arctan の微分より} \\
&= 2\left(\arctan\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) - \arctan\left(-\sqrt{3}\right)\right) \\
&= 2\left(\arctan\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= (\text{式 (10) の右辺}).
\end{aligned}
$$

よって式 (10) が証明された.
式 (9) 及び式 (10) より,

$$
\begin{aligned}
(\text{式 (11) の左辺}) &= 2\left(\arctan\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + \arctan\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right) \\
&= 2\arctan\left(\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}\right) \\
&= 2\arctan\sqrt{2} \\
&= (\text{式 (11) の右辺})
\end{aligned}
$$

よって式 (11) が証明された. □

事前準備ができたので, 定理 5 を証明する.

定理 5 の証明.

$$
\begin{aligned}
&(\text{式 } (5) \text{ の右辺}) \\
&= 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n(6n+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n(6n+3)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n(6n+5)} \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+x^6}dx + 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^2}{1+x^6}dx + 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^4}{1+x^6}dx \quad \because \text{補題 } 7 \text{ より} \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{2+x^2+2x^4}{1+x^6}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1}dx \quad \because \text{補題 } 8 \text{ より} \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x^2+1}dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1}dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1}dx \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x^2+1}dx + 2\arctan\sqrt{2} \quad \because \text{補題 } 9 \text{ の式 } (11) \text{ より} \\
&= 2\left[\arctan x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 2\arctan\sqrt{2} \quad \because \arctan \text{ の微分より} \\
&= 2\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + \arctan\sqrt{2}\right) \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \pi \\
&= (\text{式 } (5) \text{ の左辺}).
\end{aligned}
$$

以上より定理 5 が証明された. □

7 定理 6 の証明

Borwein and Bailey (2008) の Theorem 3.1, 円周率.jp (n.d.), 及びPerkins (2018) の式 2.64 を参考にする. 事前準備として、次の補題 10 及び補題 11 を証明する.

補題 10. $k = 1, 4, 5, 6$ に対して,

$$
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^{k-1}}{1-x^8}dx = \frac{1}{\sqrt{2}^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+k)}.
$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^8\right)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{8n+k-1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{8n+k-1} dx \quad \because \text{項別積分より}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{8n+k-1} dx &= \left[\frac{1}{8n+k} x^{8n+k}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{8n+k} \frac{1}{16^n}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{8n+k} \frac{1}{16^n} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n (8n+k)} \\
=& (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

以上より補題 10 が証明された. □

補題 11.

$$y^5 + y^4 + 2y^3 - 4 = (y-1)(y^2+2)(y^2+2y+2). \tag{12}$$

$$y^8 - 16 = (y^2-2)(y^2+2)(y^2-2y+2)(y^2+2y+2). \tag{13}$$

$$\frac{4(y-1)}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} = \frac{y}{y^2-2} - \frac{y-2}{y^2-2y+2}. \tag{14}$$

Proof.

$$(y-1)(y^2+2) = y^3 - y^2 + 2y - 2$$

なので、

$$\begin{aligned}
(\text{式 (12) の右辺}) &= (y^3 - y^2 + 2y - 2)(y^2+2y+2) \\
&= y^5 + y^4 + 2y^3 - 4
\end{aligned}$$

$$= (\text{式 } (12) \text{ の左辺}).$$

よって式 (12) が証明された.

$$\begin{aligned}
(\text{式 } (13) \text{ の右辺}) &= (y^2-2)(y^2+2)(y^4+4) \quad \because \text{補題 6 より} \\
&= (y^4-4)(y^4+4) \\
&= y^8-16 \\
&= (\text{式 } (13) \text{ の左辺}).
\end{aligned}$$

よって式 (13) が証明された.

$$\begin{aligned}
(\text{式 } (14) \text{ の右辺}) &= \frac{y(y^2-2y+2)-(y-2)(y^2-2)}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} \\
&= \frac{(y^3-2y^2+2y)-(y^3-2y^2-2y+4)}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} \\
&= \frac{4y-4}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} \\
&= (\text{式 } (14) \text{ の左辺}).
\end{aligned}$$

よって式 (14) が証明された. □

事前準備ができたので, 定理 6 を証明する.

定理 *6* の証明.

$$\begin{aligned}
&(\text{式 } (6) \text{ の右辺}) \\
&= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+1)} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+4)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+5)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+6)} \\
&= 4\cdot\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-x^8}dx - 2\cdot 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^3}{1-x^8}dx - 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^4}{1-x^8}dx \\
&- 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^5}{1-x^8}dx \quad \because \text{補題 10 より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}dx \\
&= \int_0^1 \frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}y^3-\sqrt{2}y^4-\sqrt{2}y^5}{1-\frac{1}{16}y^8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}dy\right) \quad \because y=\sqrt{2}x \text{ の置換積分より} \\
&= \int_0^1 \frac{4-2y^3-y^4-y^5}{1-\frac{1}{16}y^8}dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 16\int_0^1 \frac{y^5+y^4+2y^3-4}{y^8-16}dy\\
&= 16\int_0^1 \frac{(y-1)(y^2+2)(y^2+2y+2)}{(y^2-2)(y^2+2)(y^2-2y+2)(y^2+2y+2)}dy
\end{aligned}
$$

$\because$ 補題 11 の式 (12) 及び式 (13) より

$$
\begin{aligned}
&= 16\int_0^1 \frac{(y-1)}{(y^2-2)(y^2-2y+2)}dy\\
&= 4\int_0^1 \frac{y}{y^2-2}-\frac{y-2}{y^2-2y+2}dy \quad \because \text{補題 11 の式 (14) より}\\
&= 4\int_0^1 \frac{y}{y^2-2}-\frac{y-1}{y^2-2y+2}-\frac{(-1)}{y^2-2y+2}dy\\
&= 4\int_0^1 \frac{y}{y^2-2}dy-4\int_0^1 \frac{y-1}{y^2-2y+2}dy+4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy\\
&= 2\int_0^1 \frac{(y^2-2)'}{y^2-2}dy-2\int_0^1 \frac{(y^2-2y+2)'}{y^2-2y+2}dy+4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy\\
&= 2\left[\log|y^2-2|\right]_0^1-2\left[\log|y^2-2y+2|\right]_0^1+4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy\\
&= -2\log 2+2\log 2+4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy\\
&= 4\int_0^1 \frac{1}{y^2-2y+2}dy\\
&= 4\int_0^1 \frac{1}{(y-1)^2+1}dy\\
&= 4\int_{-1}^0 \frac{1}{u^2+1}du \quad \because u=y-1 \text{ の置換積分より}\\
&= 4\left[\arctan u\right]_{-1}^0 \quad \because \arctan \text{ の微分より}\\
&= 4\left(-\arctan(-1)\right)\\
&= \pi\\
&= (\text{式 (6) の左辺}).
\end{aligned}
$$

以上より定理 6 が証明された. □

8 定理 7 の証明

KK62526 (n.d.) を参考にする. 事前準備として, 次の補題 12 を証明する.

補題 12. $k=1,3,5,7$ に対して,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}dx = \frac{1}{\sqrt{3}^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{81^n(8n+k)}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}(x^8)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{8n+k-1}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{8n+k-1}dx \quad \because \text{項別積分より}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{8n+k-1}dx &= \left[\frac{1}{8n+k}x^{8n+k}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}^k}\frac{1}{8n+k}\frac{1}{81^n}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}^k}\frac{1}{8n+k}\frac{1}{81^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{81^n(8n+k)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

以上より, 補題 12 が証明された. □

事前準備ができたので, 定理 7 を証明する.

定理 *7* の証明.

(式 (7) の右辺)

$$= 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{81^n(8n+1)} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{81^n(8n+3)} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{81^n(8n+5)}$$
$$- \frac{2\sqrt{3}}{27}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{81^n(8n+7)}$$

$$
\begin{aligned}
&= 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-x^8}dx - 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2}{1-x^8}dx + 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^4}{1-x^8}dx - 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^6}{1-x^8}dx \\
&\quad \because \text{補題 12 より} \\
&= 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-x^2+x^4-x^6}{1-x^8}dx \\
&= 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= 6\frac{\pi}{6} \quad \because \text{補題 2 より} \\
&= \pi \\
&= (\text{式 (7) の左辺})
\end{aligned}
$$

以上より定理 7 が証明された. □

9　定理 8 は証明できなかった

定理 8 はWeisstein (n.d.) の式 (3) に記載されています. 残念ながら私の実力では, 定理 8 を証明できませんでした. どこで詰まったかというと, 次の積分

$$
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{8x+4\sqrt{2}x^2-4\sqrt{2}x^4}{(1-x^2)(1+x^4)}dx
$$

です. この積分はおそらく円周率 π になるはずですが, どの様に式変形すればよいのか分からなくなりました.

References

Adamchik, V. S., & Wagon, S. (1996). π: A 2000-year search changes direction.

Arndt, J., Haenel, C., Lischka, C., & Lischka, D. (2001). *Pi - Unleashed*. Springer Berlin Heidelberg.

Borwein, J., & Bailey, D. (2008). *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*. CRC Press.

KK62526. (n.d.). *BBP アルゴリズム*. Retrieved June 19, 2020, from http://www.kk62526.server-shared.com/pi/BBP.html

Nimbran, A. (2016). TAYLOR SERIES FOR ARCTAN AND BBP-TYPE FORMULAS FOR π. *Mathematics Student*, *to be published.*

Perkins, D. (2018). *Phi, Pi, e and i*. American Mathematical Society.

Schinazi, R. (2011). *From Calculus to Analysis*. Birkhäuser Boston.

Weisstein, E. (n.d.). *"BBP-Type Formula." From MathWorld–A Wolfram Web Resource*. Retrieved June 19, 2020, from https://mathworld.wolfram.com/BBP-TypeFormula.html

円周率.jp. (n.d.). *BBP の公式の証明*. Retrieved June 1, 2020, from http://xn--w6q13e505b.jp/proof/bbp.html

松本圭司. (2011). 円周率 π について. Retrieved June 1, 2020, from http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matsu/pdf/syoutai.pdf