円周率公式の証明 (追加分)

2021 年 6 月 22 日

1　はじめに

次の 3 つの数学公式を証明します.

定理 1.

$$\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n. \tag{1}$$

定理 2.

$$\log(2+\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n+1)}. \tag{2}$$

定理 3.

$$\pi = -3\log\left(2+\sqrt{3}\right) + 4\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n(4n+1)}. \tag{3}$$

証明に必要な知識は, ほぼ高校数学のみです. 使用する大学数学は「$\arctan x$ を微分すると $\dfrac{1}{x^2+1}$ になる」だけです. トリッキーな技法は使わず、ひたすら基本的な式変形を繰返します. そして, 3 つの定理は同じ流れで証明できます.

2　定理 1 の証明

定理 1 を 2 通りの方法で証明します.

証明 *1.* Schinazi (2011) の 100 ページを参考にする. $\log(1-x)$ のべき級数展開として

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{for all } x\in[-1,1).$$

が知られている．上式に $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入すると, 式 (1) が得られる．以上より定理 1 が証明された. □

2 つ目の証明は, 事前準備として補題 1 及び補題 2 を証明する.

補題 1.

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-x}dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n .$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^n dx \quad \because \text{項別積分より}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^n dx &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n .
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

以上より補題 1 が証明された. □

補題 2.

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-x}dx = -\log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Proof.

$$(\text{左辺}) = -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x-1}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left[\log|x-1|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= -\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

よって補題 2 が証明された. □

事前準備ができたので, 2 つ目の証明を行う.

証明 *2.* 補題 1 及び補題 2 より

$$
-\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n.
$$

上式を整理すると, 式 (1) になる. 以上より定理 1 が証明された. □

3　定理 2 の証明

事前準備として, 次の補題 3, 補題 4, 及び補題 5 を証明する.

補題 3.

$$
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n+1)}.
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^{2n}dx \quad \because \text{項別積分より}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^{2n}dx &= \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^n}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(2n+1)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

よって補題 3 が証明された. □

補題 4.

$$
\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{(x+1)-(x-1)}{2(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{1}{(x-1)(x+1)} \\
&= (\text{左辺}).
\end{aligned}
$$

よって補題 4 が証明された. □

補題 5.

$$
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{3}\right)
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x^2-1} dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} dx \quad \because \text{補題 4 より} \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x+1} dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[\log|x-1|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{2}\left[\log|x+1|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= -\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{3}\right) \\
&= (右辺).
\end{aligned}
$$

よって補題 5 が証明された. □

事前準備ができたので, 定理 *2* を証明する.

定理 *2* の証明. 補題 3 及び補題 5 より

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n+1)} = \frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{3}\right).$$

上式を整理すると, 式 (2) になる. 以上より定理 2 が証明された. □

4　定理 3 の証明

事前準備として, 次の補題 6, 補題 7 及び補題 8 を証明する.

補題 6.

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1-x^4}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n(4n+1)}.$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(左辺) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sum_{n=0}^{\infty}(x^4)^n dx \quad \because 等比級数の公式より \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^{4n}dx \quad \because 項別積分より
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^{4n}dx &= \left[\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{4n+1}\frac{1}{9^n}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{4n+1} \frac{1}{9^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n(4n+1)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

以上より補題 6 が証明された. □

補題 7.

$$
\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} \quad \because \text{補題 4 より} \\
&= \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} \\
&= (\text{左辺}).
\end{aligned}
$$

以上より補題 7 が証明された. □

補題 8.

$$
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-x^4}dx = \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{12}
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}dx \quad \because \text{補題 7 より} \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= -\frac{1}{4}\left[\log|x-1|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{4}\left[\log|x+1|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&\because \arctan \text{の微分より}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
&= \log\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)+\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\\
&= \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{12}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

よって補題 8 が証明された. □

事前準備ができたので, 定理 3 を証明する.

定理 3 の証明. 補題 6 及び補題 8 より,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n(4n+1)}=\frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{12}.$$

上式を整理すると, 式 (3) になる. 以上より定理 3 が証明された. □

References

Schinazi, R. (2011). *From Calculus to Analysis*. Birkhäuser Boston.