円周率の性質

May 28, 2022

1 はじめに

円周率 π の性質を羅列しました．私の好みで計算式を羅列したので、性質の順序は無茶苦茶ですし網羅性もないです．

2 性質 01

中村郁 (2003) によると, 計算機を使わず手計算で

$$\frac{1}{10}\left(47-9\sqrt{3}\right) < \pi < 6 - \frac{1}{4} - \frac{3}{320} - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

を算出できる．よって,

$$3.1411542 < \pi < 3.1425488$$

が成立する．

3 性質 02

Mercer (2014) の Ex 10.38 によると, 計算機を使わず手計算で

$$\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$$

を算出できる．よって,

$$3.1412 < \pi < 3.1421$$

が成立する．

4 性質 03

Mercer (2014) の Example 10.13 を参考にする．円周率 π の性質として,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

が知られている．

5　性質 04

Mercer (2014) の Exercise 10.40 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\frac{\pi}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

が知られている．

6　性質 05

Loya (2018) の 8.2.4 節及びRoy (1990) の式 13 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\pi = 3 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3 - (2n+1)}$$

が知られている．

7　性質 06

Loya (2018) の 7.7.3 節を参考にする．数列 b_n を $b_1 = 0,\ b_2 = 1,$

$$b_{n+2} = \frac{1}{n} b_{n+1} + b_n, \quad n \geq 1$$

と定める．このとき円周率 π の性質として，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b_n^2} = \frac{\pi}{2}$$

が知られている．

8　性質 07

Nelsen (1993) の 39 ページを参考にする．円周率 π の性質として，

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

が知られている．

9　性質 08

Nelsen (2015) の Cameo 40 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$$

が知られている．

10　性質 09

Nelsen (2015) の Cameo 40 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$

が知られている．

11　性質 10

Loya (2018) の 6.9.3 節を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

が知られている．

12　性質 11

Schinazi (2011) の Application 4.2 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

が知られている．

13　性質 12

Schinazi (2011) の Application 4.8 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\pi = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2(2n+1)2^{4n}}$$

が知られている．

14　性質 13

Loya (2018) の Theorem 5.3 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

が知られている．

15　性質 14

Perkins (2018) の式 2.64 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

が知られている．

16　性質 15

Roy (1990) の 302 ページを参考にする．円周率 π の性質として，

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5 + 4(2n+1)}$$

が知られている．

17　性質 16

Borwein and Bailey (2008) の式 3.19 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\frac{\pi}{4} = 44 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} - 12 \arctan \frac{1}{682} + 24 \arctan \frac{1}{12943}$$

が知られている．

18　性質 17

Arndt et al. (2001) の式 5.22 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239}$$

が知られている．

19　性質 18

Arndt et al. (2001) の式 16.13 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\pi = 4 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n)^2 - 1}$$

が知られている．

20　性質 19

Nelsen (2015) の Cameo 40, Sofo (2004) の 184 ページ, 及びBailey (2020) の式 9 を参考にする. 円周率 π の性質として,

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} - 6\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+3)(2n-1)16^n}$$

が知られている.

21　性質 20

Adamchik and Wagon (1997) の 854 ページ及びBellard (1997) の式 5 を参考にする. 円周率 π の性質として,

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3}\right)$$

が知られている.

22　性質 21

Greene et al. (2013) の式 4.13 を参考にする. 数列 a_n 及び b_n を $a_0 = 1,\ b_0 = 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4n}{2n-1}a_{n-1} - \frac{1}{2n-1}, \quad n \geq 1 \\ b_n &= \frac{4n}{2n-1}b_{n-1} + \frac{8n}{(2n-1)^2}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

と定める. このとき円周率 π の性質として,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \pi$$

が知られている.

23　性質 22

Arndt et al. (2001) の式 16.82 及びChudnovsky and Chudnovsky (1998) の 2748 ページを参考にする. 円周率 π の性質として,

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{50n-6}{\binom{3n}{n}2^n}$$

が知られている.

24　性質 23

Arndt et al. (2001) の式 8.2 を参考にする. 円周率 π の性質として,

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}$$

が知られている.

25　性質 24

Lehmer (1985) の 455 ページを参考にする. 円周率 π の性質として,

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\binom{2n}{n}}$$

が知られている.

26　性質 25

Sprugnoli (2006) の Theorem 3.4 及びLehmer (1985) の式 12 を参考にする. 円周率 π の性質として,

$$\pi = 3\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}}$$

が知られている.

27　性質 26

Chudnovsky and Chudnovsky (1998) の 2749 ページ及びSprugnoli (2006) の Theorem 3.3 を参考にする. 円周率 π の性質として,

$$\pi = -4 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\binom{2n}{n}}$$

が知られている.

28　性質 27

Loya (2018) の Theorem 4.58 及び Exercise 4.12.4 を参考にする. 数列 p_n, P_n 及び a_n を $p_0 = 3$, $P_0 = 2\sqrt{3}$,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}, \quad n \geq 0 \\ p_{n+1} &= \sqrt{p_n P_{n+1}}, \quad n \geq 0 \\ a_n &= \frac{1}{3}(2p_n + P_n), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

と定める. このとき, 数列 p_n, P_n 及び a_n は円周率 π に収束する.

29　性質 28

Borwein and Bailey (2008) の式 3.16 を参考にする．数列 $a_n,\ b_n,\ c_n,\ s_n$ 及び p_n を $a_0 = 1,\ b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ s_0 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad n \geq 1 \\ b_n &= \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}, \quad n \geq 1 \\ c_n &= a_n^2 - b_n^2, \quad n \geq 1 \\ s_n &= s_{n-1} - 2^n c_n, \quad n \geq 1 \\ p_n &= \frac{2a_n^2}{s_n}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

と定める．このとき, 数列 p_n は円周率 π に収束する．

30　性質 29

Milla (2019) の Algorithm 2 を参考にする．数列 k_n 及び e_n を $k_0 = 3 - 2\sqrt{2},\ e_0 = 6 - 4\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}, \quad n \geq 1 \\ e_n &= e_{n-1}(1 + k_n)^2 - 2^{n+1} k_n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

と定める．このとき, 数列 e_n は $\frac{1}{\pi}$ に収束する．

31　性質 30

Borwein and Bailey (2008) の式 3.17 を参考にする．数列 $a_n,\ r_n$ 及び s_n を $a_0 = \frac{1}{3},\ s_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{3}{1 + 2(1 - s_{n-1}^3)^{\frac{1}{3}}}, \quad n \geq 1 \\ s_n &= \frac{r_n - 1}{2}, \quad n \geq 1 \\ a_n &= r_n^2 a_{n-1} - 3^{n-1}(r_n^2 - 1), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

と定める．このとき, 数列 a_n は $\frac{1}{\pi}$ に収束する．

32　性質 31

Milla (2019) の Algorithm 3 を参考にする．数列 y_n 及び z_n を $y_0 = \sqrt{2} - 1,\ z_0 = 6 - 4\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_{n-1}^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_{n-1}^4}}, \quad n \geq 1 \\ z_n &= z_{n-1}(1 + y_n)^4 - 2 \cdot 4^n y_n (1 + y_n + y_n^2), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

と定める．このとき, 数列 z_n は $\frac{1}{\pi}$ に収束する．

33　性質 32

Schinazi (2011) の 107 ページを参考にする．円周率 π の性質として，

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{1103+26390n}{396^{4n}}$$

が知られている．

34　性質 33

Arndt et al. (2001) の式 16.45 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{3528}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n)!}{(n!)^4 4^{4n}}\frac{1123+21460n}{882^{2n}}$$

が知られている．

35　性質 34

Arndt et al. (2001) の式 16.69 を参考にする．円周率 π の性質として，

$$\pi=16\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n-3)(4n-1)3^{2n-1}}$$

が知られている．

36　性質 35

Zhou (2010) の Theorem 1 及びZhou and Markov (2010) の Theorem 2 を参考にする．円周率 π は無理数であることが知られている．

37　性質 36

Loya (2018) の式 8.9 を参考にする．連分数展開として，

$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1^2}{2+}\,\frac{3^2}{2+}\,\frac{5^2}{2+}\,\frac{7^2}{2+}\,\frac{9^2}{2+}\,\frac{11^2}{2+}\,\frac{13^2}{2+}\cdots$$

が知られている．

38　性質 37

Loya (2018) の式 8.12 を参考にする．連分数展開として，

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{1+}\,\frac{1\cdot 2}{1+}\,\frac{2\cdot 3}{1+}\,\frac{3\cdot 4}{1+}\,\frac{4\cdot 5}{1+}\,\frac{5\cdot 6}{1+}\,\frac{6\cdot 7}{1+}\,\frac{7\cdot 8}{1+}\cdots$$

が知られている．

39　性質 38

Loya (2018) の式 8.14 を参考にする．連分数展開として，

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6 +} \frac{3^2}{6 +} \frac{5^2}{6 +} \frac{7^2}{6 +} \frac{9^2}{6 +} \frac{11^2}{6 +} \frac{13^2}{6 +} + \cdots$$

が知られている．

40　性質 39

Arndt et al. (2001) の式 16.99 を参考にする．連分数展開として，

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{3 +} \frac{2^2}{5 +} \frac{3^2}{7 +} \frac{4^2}{9 +} \frac{5^2}{11 +} \frac{6^2}{13 +} \frac{7^2}{15 +} \cdots$$

が知られている．

41　性質 40

Arndt et al. (2001) の式 16.98 を参考にする．連分数展開として，

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{2}{3 +} \frac{1 \cdot 3}{4 +} \frac{3 \cdot 5}{4 +} \frac{5 \cdot 7}{4 +} \frac{7 \cdot 9}{4 +} \frac{9 \cdot 11}{4 +} \frac{11 \cdot 13}{4 +} \frac{13 \cdot 15}{4 +} \cdots$$

が知られている．

42　性質 41

Arndt et al. (2001) の式 16.97 を参考にする．連分数展開として，

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{2}{7 +} \frac{1 \cdot 3}{8 +} \frac{3 \cdot 5}{8 +} \frac{5 \cdot 7}{8 +} \frac{7 \cdot 9}{8 +} \frac{9 \cdot 11}{8 +} \frac{11 \cdot 13}{8 +} \frac{13 \cdot 15}{8 +} \cdots$$

が知られている．

43　性質 42

Raayoni et al. (2019) の Table 4 を参考にする．連分数展開として，

$$\frac{8}{-8 + 3\pi} = 5 + \frac{1 \cdot 5}{7 +} \frac{2 \cdot 6}{9 +} \frac{3 \cdot 7}{11 +} \frac{4 \cdot 8}{13 +} \frac{5 \cdot 9}{15 +} \frac{6 \cdot 10}{17 +} \frac{7 \cdot 11}{19 +} \cdots$$

が知られている．

44　性質 43

Raayoni et al. (2019) の Table 4 を参考にする．連分数展開として,

$$\frac{4}{-2+\pi} = 3 + \frac{1\cdot 3}{5} + \frac{2\cdot 4}{7} + \frac{3\cdot 5}{9} + \frac{4\cdot 6}{11} + \frac{5\cdot 7}{13} + \frac{6\cdot 8}{15} + \frac{7\cdot 9}{17} + \cdots$$

が知られている．

45　性質 44

Sofo (2004) の 185 ページ及びLupas (2000) を参考にする．円周率 π の性質として,

$$\pi = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-16)^n \frac{\binom{2n}{n}(40n^2+16n+1)}{\binom{4n}{2n}^2 2n(4n+1)^2}$$

が知られている．

46　性質 45

Milla (2018) の 1 ページを参考にする．円周率 π の性質として,

$$\frac{1}{\pi} = 12 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(3n)!(n!)^3} \cdot \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{3n+3/2}}$$

が知られている．

References

Adamchik, V., & Wagon, S. (1997). A simple formula for π. *The American mathematical monthly*, *104*(9), 852–855.

Arndt, J., Haenel, C., Lischka, C., & Lischka, D. (2001). *Pi - Unleashed*. Springer Berlin Heidelberg.

Bailey, D. H. (2020). *A catalogue of mathematical formulas involving π, with analysis*. Retrieved October 18, 2020, from https://www.davidhbailey.com/dhbpapers/pi-formulas.pdf

Bellard, F. (1997). *A new formula to compute the n'th binary digit of π*. Retrieved October 18, 2020, from https://bellard.org/pi/pi_bin.pdf

Borwein, J., & Bailey, D. (2008). *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*. CRC Press.

Chudnovsky, D., & Chudnovsky, G. (1998). Classification of hypergeometric identities for π and other logarithms of algebraic numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *95*(6), 2744–2749.

Greene, J. et al. (2013). On the Limiting Structure of Some Central Binomial Evaluations. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, *25*(1), 2–14.

Lehmer, D. H. (1985). Interesting series involving the central binomial coefficient. *The American Mathematical Monthly*, *92*(7), 449–457.

Loya, P. (2018). *Amazing and Aesthetic Aspects of Analysis*. Springer New York.

Lupas, A. (2000). Formulae for some classical constants. *Schriftenreihe des fachbereichs Mathematik, Gerhard Mercator Universitat Dusiburg*, 70–76.

Mercer, P. (2014). *More Calculus of a Single Variable*. Springer New York.

Milla, L. (2018). A detailed proof of the Chudnovsky formula with means of basic complex analysis – Ein ausführlicher Beweis der Chudnovsky-Formel mit elementarer Funktionentheorie.

Milla, L. (2019). Easy Proof of Three Recursive π-Algorithms – Einfacher Beweis dreier rekursiver π-Algorithmen. *arXiv preprint arXiv:1907.04110*.

Nelsen, R. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America.

Nelsen, R. (2015). *Cameos for Calculus: Visualization in the First-Year Course*. Mathematical Association of America.

Perkins, D. (2018). *Phi, Pi, e and i*. American Mathematical Society.

Raayoni, G., Gottlieb, S., Pisha, G., Harris, Y., Manor, Y., Mendlovic, U., Haviv, D., Hadad, Y., & Kaminer, I. (2019). The ramanujan machine: automatically generated conjectures on fundamental constants. *arXiv preprint arXiv:1907.00205*.

Roy, R. (1990). The discovery of the series formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha. *Mathematics magazine*, *63*(5), 291–306.

Schinazi, R. (2011). *From Calculus to Analysis*. Birkhäuser Boston.

Sofo, A. (2004). Some representations of pi. *AUSTRALIAN MATHEMATICAL SOCIETY GAZETTE*, *31*(3), 184–189.

Sprugnoli, R. (2006). Sums of reciprocals of the central binomial coefficients. *Integers*, *6*, A27.

Zhou, L. (2010). *On "Discovering and Proving that π Is Irrational"*. Retrieved October 27, 2020, from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.892.5863&rep=rep1&type=pdf

Zhou, L., & Markov, L. (2010). Recurrent proofs of the irrationality of certain trigonometric values. *The American Mathematical Monthly*, *117*(4), 360–362.

中村郁. (2003). 円周率はほぼ 3.14 である. 数学セミナー, *42*(11), 4–7.