

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ の公式

August 17, 2022

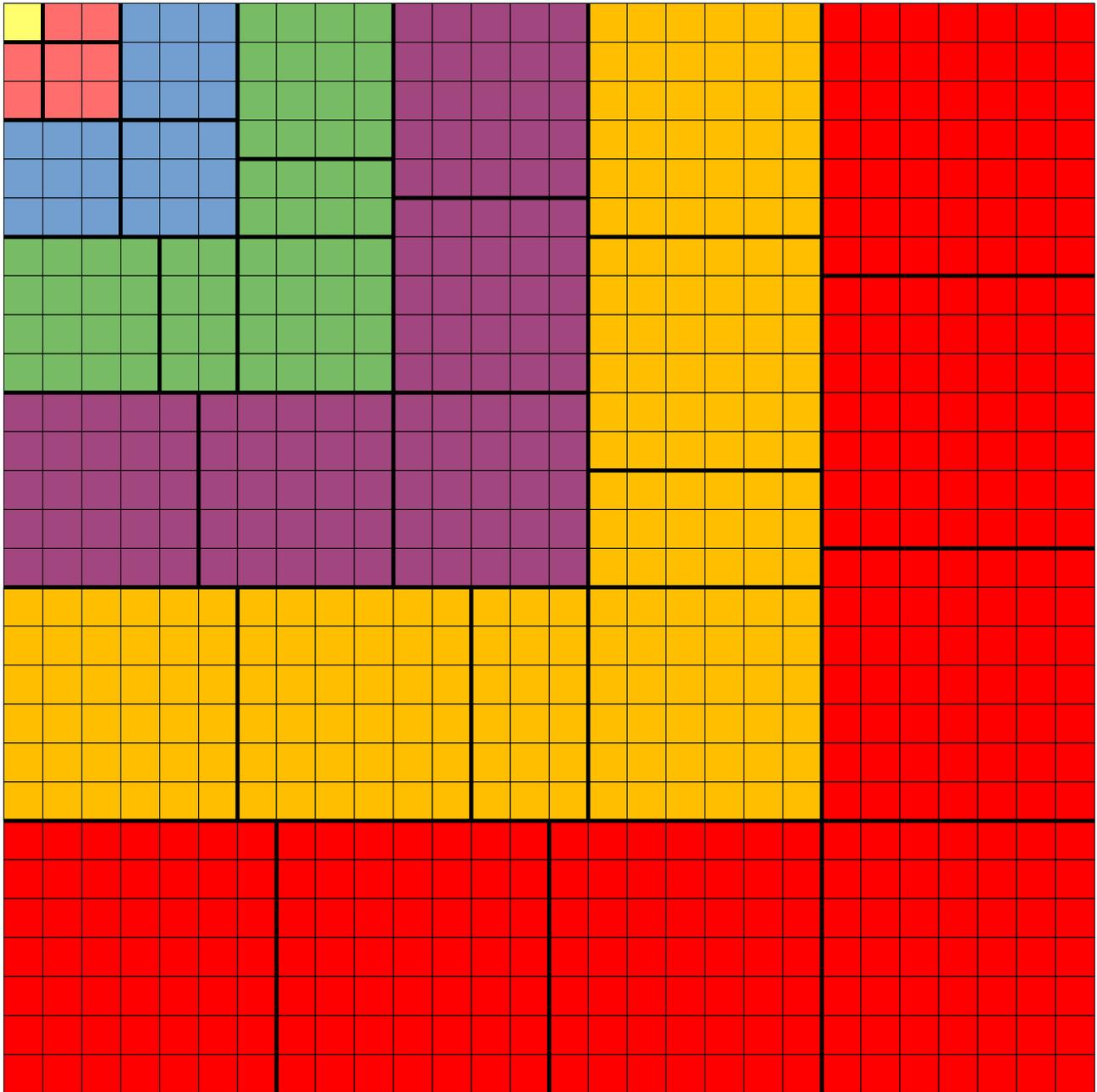
1 はじめに

高校数学の復習をしています。公式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

を 3 通りの方法で証明します。

2 証明 1



Nelsen (1993) の 85 ページを参考にする。

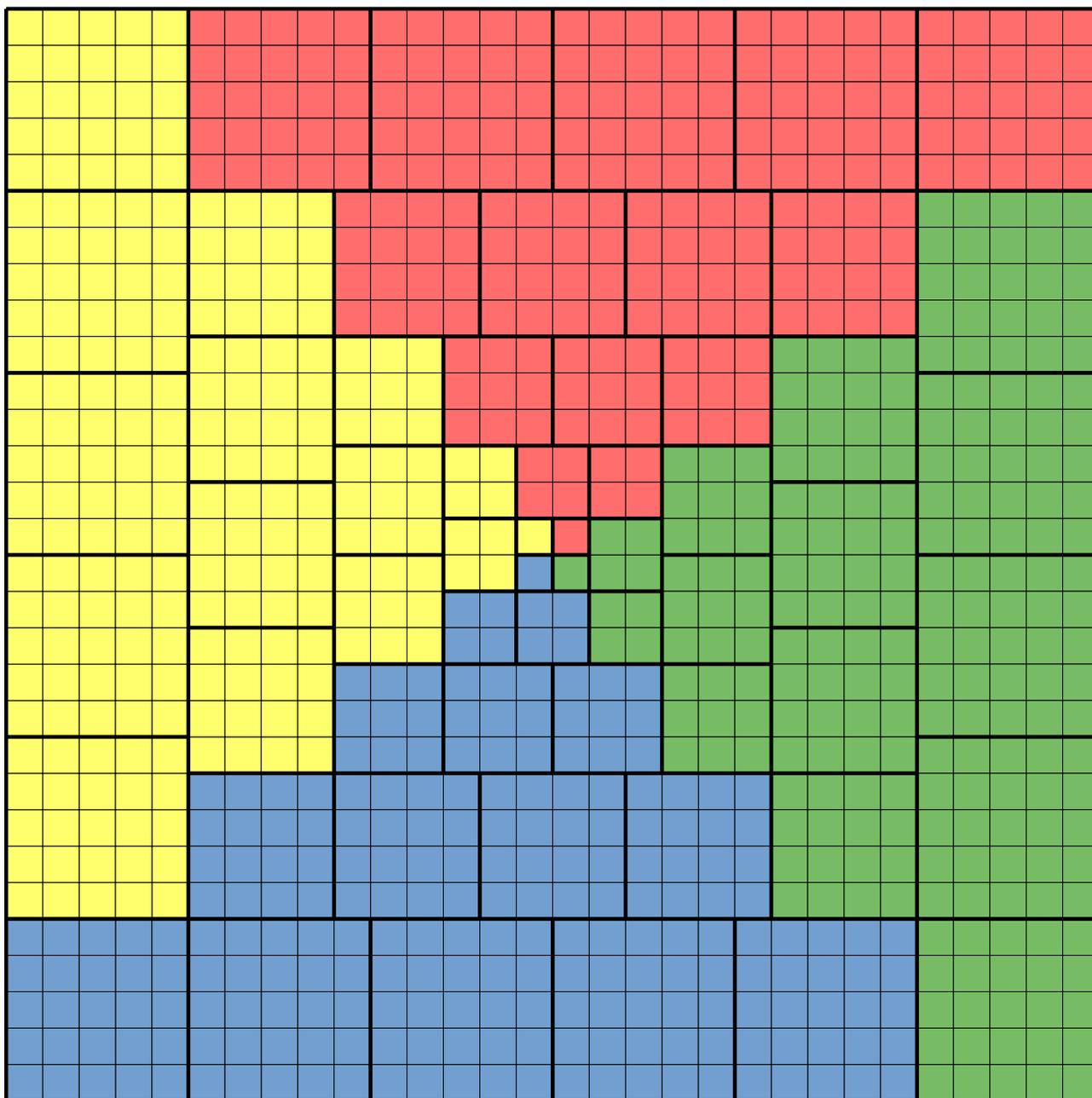
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

上式を整理すると

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

が成立する。

3 証明 2



Nelsen (1993) の 87 ページを参考にする。

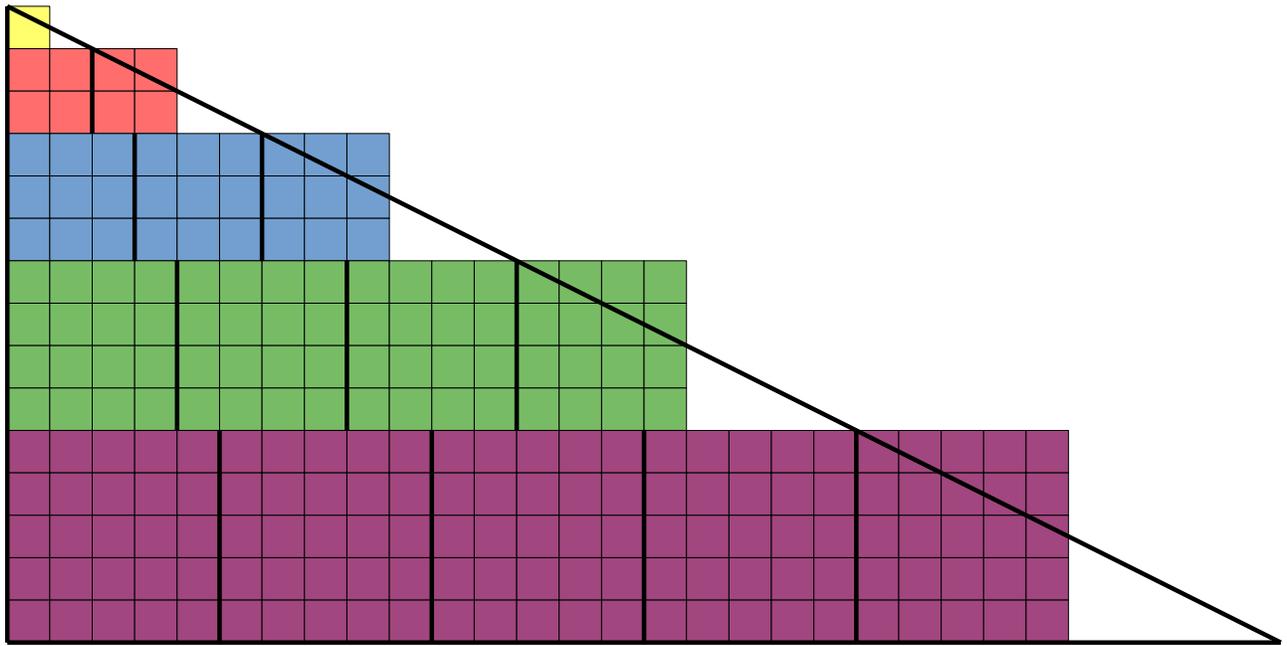
$$4(1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot n^2) = (n^2 + n)^2$$

上式を整理すると

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

が成立する。

4 証明 3



Nelsen (1993) の 90 ページを参考にする。

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)(n^2 + n)$$

上式を整理すると

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$$

が成立する。

参考文献

Nelsen, R. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America.