$1+2+3+\cdots+n$ の公式

August 9, 2022

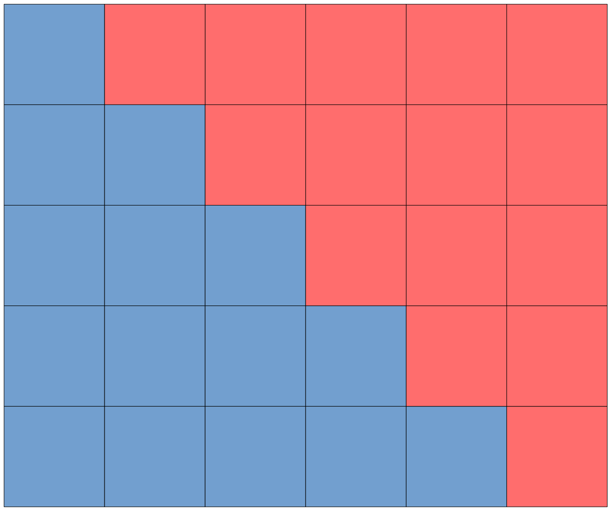
1　はじめに

高校数学の復習をしています。公式

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

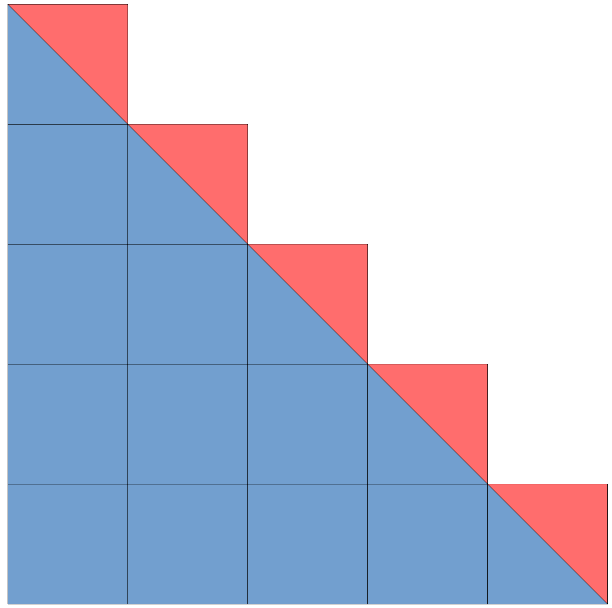
を 3 通りの方法で証明します。

2　証明 1



　Nelsen (1993) の 69 ページ及びStrick (2021) の 24 ページを参考にする。
長方形の面積 $= 5(5+1)$
青の面積 $= 1+2+3+4+5$
赤の面積 $= 1+2+3+4+5$
長方形の面積 $=$ (青の面積) $+$ (赤の面積) より
$5(5+1) = 2(1+2+3+4+5)$. よって $1+2+3+4+5 = \frac{1}{2}5(5+1)$ が成立する。
議論を一般化する。
長方形の面積 $= n(n+1)$
青の面積 $= 1+2+3+\cdots+n$
赤の面積 $= 1+2+3+\cdots+n$
長方形の面積 $=$ (青の面積) $+$ (赤の面積) より
$n(n+1) = 2(1+2+3+\cdots+n)$. よって $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ が成立する。

3　証明 2



Nelsen (1993) の 70 ページを参考にする。
全体の面積 $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
青の面積 $= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5$
赤の面積 $= 5 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right)$
全体の面積 $=$ (青の面積) $+$ (赤の面積) より

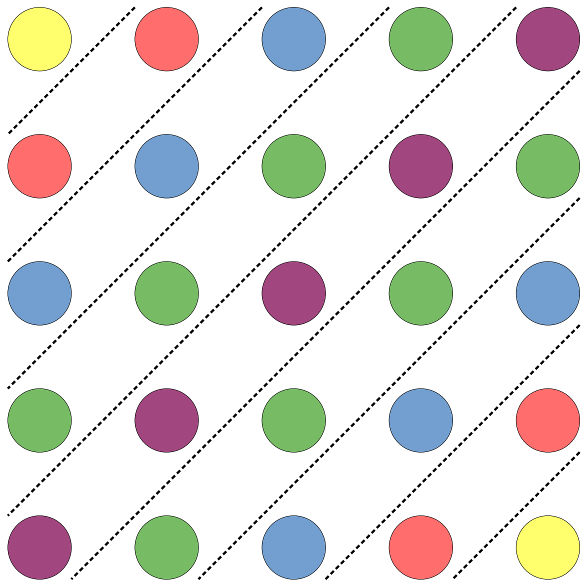
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 + 5 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) \\ &= \frac{1}{2} 5(5+1) \end{aligned}$$

が成立する。
議論を一般化する。
全体の面積 $= 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
青の面積 $= \frac{1}{2} \cdot n \cdot n$
赤の面積 $= n \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right)$
全体の面積 $=$ (青の面積) $+$ (赤の面積) より

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{1}{2} \cdot n \cdot n + n \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) \end{aligned}$$

が成立する。

4　証明 3



　Nelsen (1993) の 74 ページを参考にする。
丸の個数 $= 5^2$
破線で区切って丸の個数を数えると $1+2+3+4+5+4+3+2+1$。
よって $1+2+3+4+5+4+3+2+1 = 5^2$ が成立する。
両辺に 5 を足して 2 で割ると

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5 &= \frac{1}{2}(5^2+5) \\ &= \frac{1}{2}5(5+1) \end{aligned}$$

が成立する。
議論を一般化する。
丸の個数 $= n^2$
破線で区切って丸の個数を数えると $1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1$。
よって $1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1 = n^2$ が成立する。
両辺に n を足して 2 で割ると

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n &= \frac{1}{2}(n^2+n) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

が成立する。

参考文献

Nelsen, R. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America.

Strick, H. (2021). *Mathematics is Beautiful: Suggestions for people between 9 and 99 years to look at and explore*. Springer Berlin Heidelberg.