$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ の公式

August 9, 2022

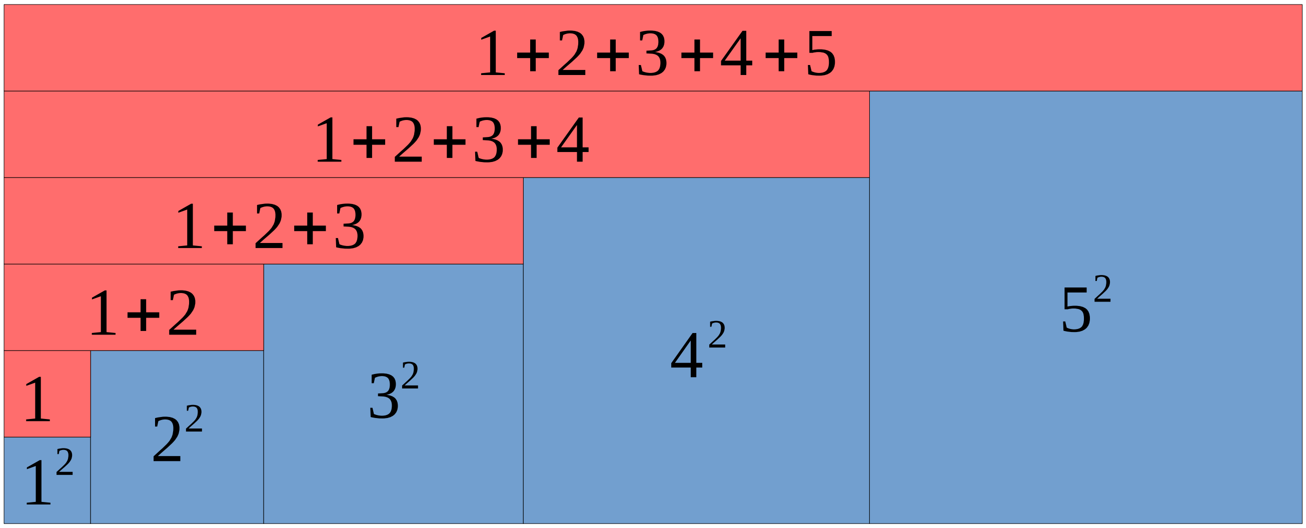
1　はじめに

高校数学の復習をしています。公式

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を 4 通りの方法で証明します。

2　証明 1



Strick (2021) の 39 ページ及びOrosi (2018) を参考にする。

$$
\begin{aligned}
\text{長方形の面積} &= (n+1)(1+2+3+\cdots+n) \\
&= (n+1)\frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{2}n(n+1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\text{青の面積} = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2
$$

$$
\begin{aligned}
\text{赤の面積} &= 1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+n) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(1+2+3+\cdots+i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i(i+1) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{4}n(n+1)
\end{aligned}
$$

長方形の面積 $=$ (青の面積) $+$ (赤の面積) より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}n(n+1)^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{4}n(n+1) \\ &= \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{4}n(n+1)\end{aligned}$$

上式を整理すると

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{1}{4}n(n+1)\left(2(n+1)-1\right) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

よって

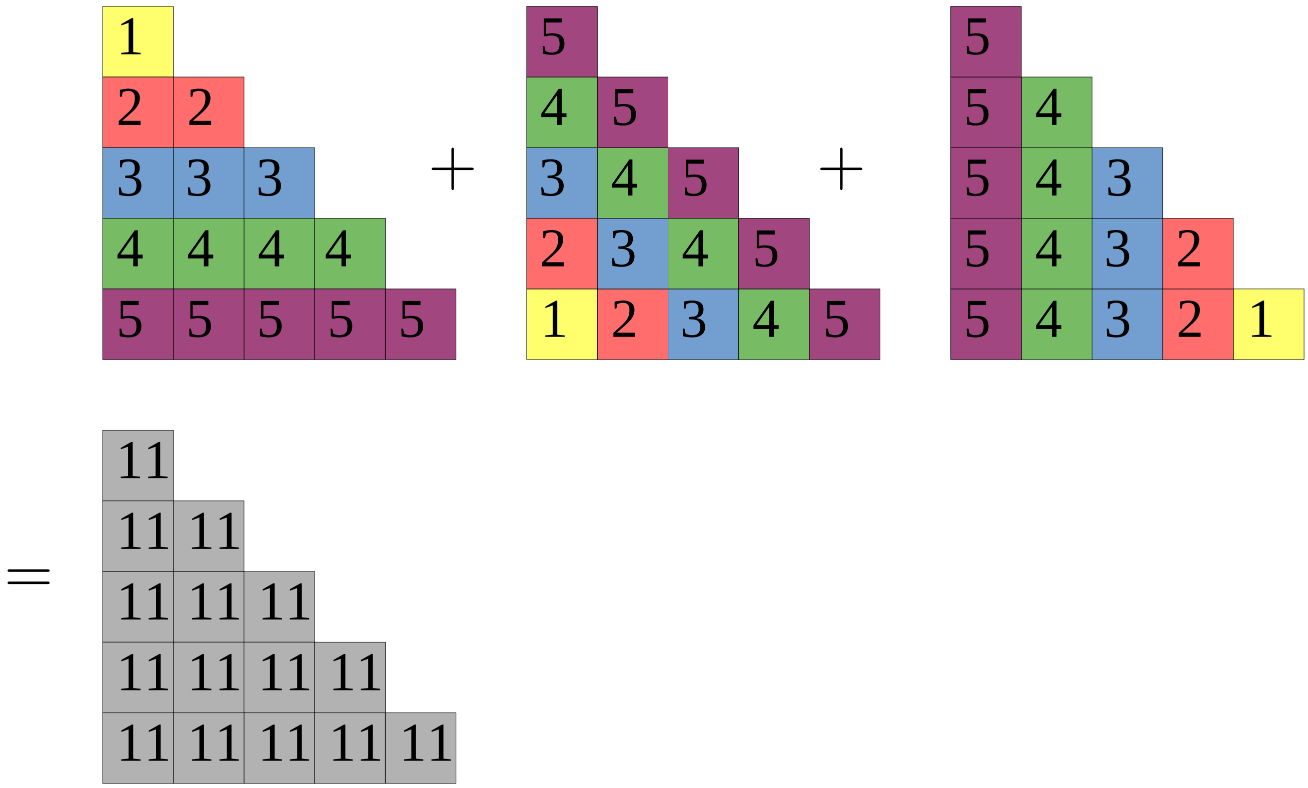
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

つまり、

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が証明された。

3　証明 2



Strick (2021) の 41 ページ及びNelsen (1993) の 79 ページを参考にする。

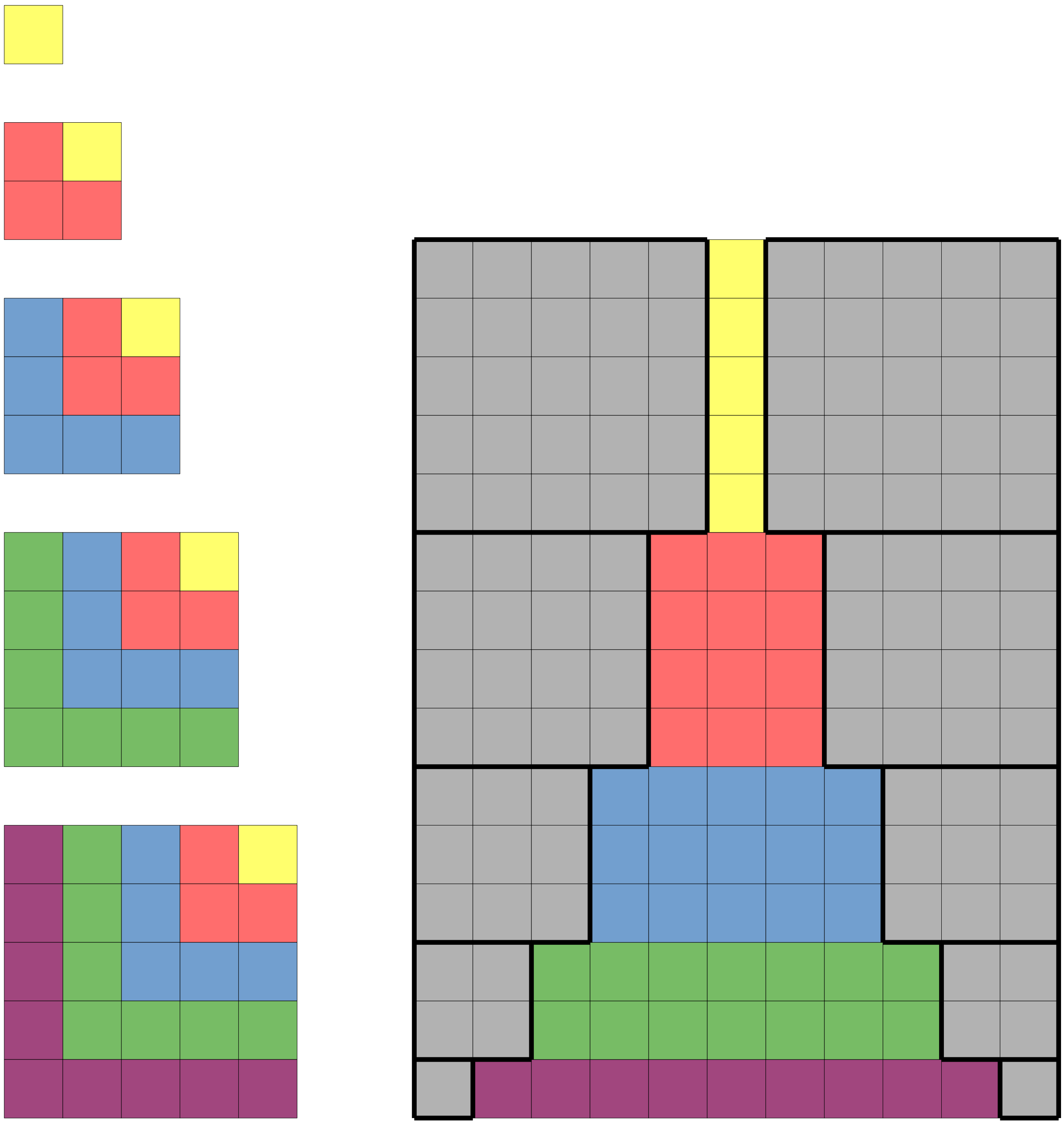
$$
\begin{aligned}
3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) &= (2n+1)(1+2+3+\cdots+n) \\
&= (2n+1)\frac{1}{2}n(n+1)
\end{aligned}
$$

上式を整理すると

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が成立する。

4　証明 3



Nelsen (1993) の 78 ページを参考にする。

$$3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = (2n+1)(1+2+\cdots+n)$$

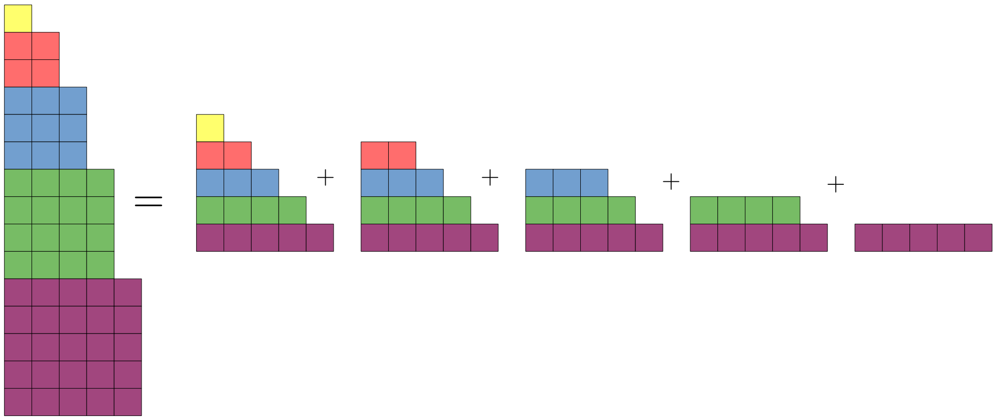
上式を整理すると

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

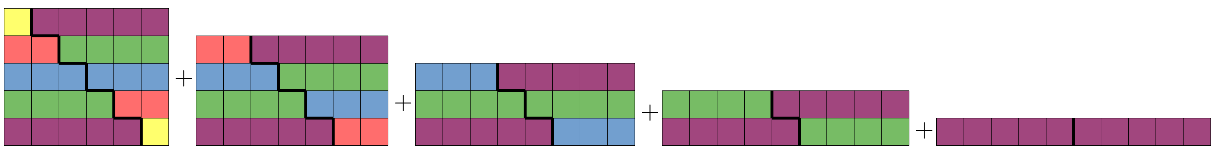
が成立する。

5　証明 4

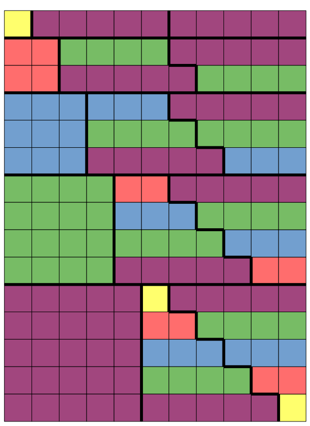
$S =$



$2S =$



$3S =$



Chakraborty (2018) を参考にする。

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = (2n+1)(1+2+3+\cdots+n)$$

上式を整理すると

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が成立する。

参考文献

Chakraborty, B. (2018). Proof without words: The sum of squares. *Mathematical Intelligencer*, *40*(2), 20–20.

Nelsen, R. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America.

Orosi, G. (2018). Proof Without Words: Sum of the First n Integers Squared. *Ohio Journal of School Mathematics*, *78*(1).

Strick, H. (2021). *Mathematics is Beautiful: Suggestions for people between 9 and 99 years to look at and explore*. Springer Berlin Heidelberg.