古代バビロニア人は どのように２の平方根を求めたか

2023年2月26日(日)

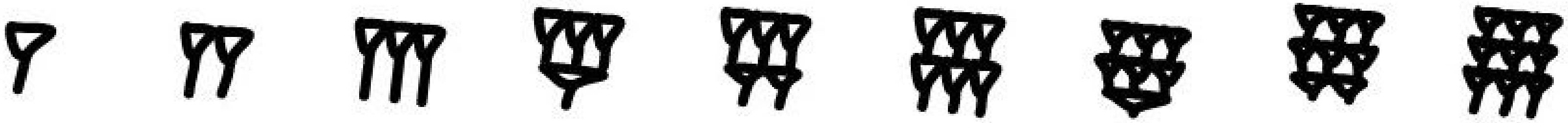
NPO法人京都アカデメイア 藤原大樹

粘土板 YBC7289 [1]

今日はこの粘土板YBC7289
の意味と謎を解き明かします。

バビロニアの数字 [2]

1 2 3 4 5 6 7 8 9

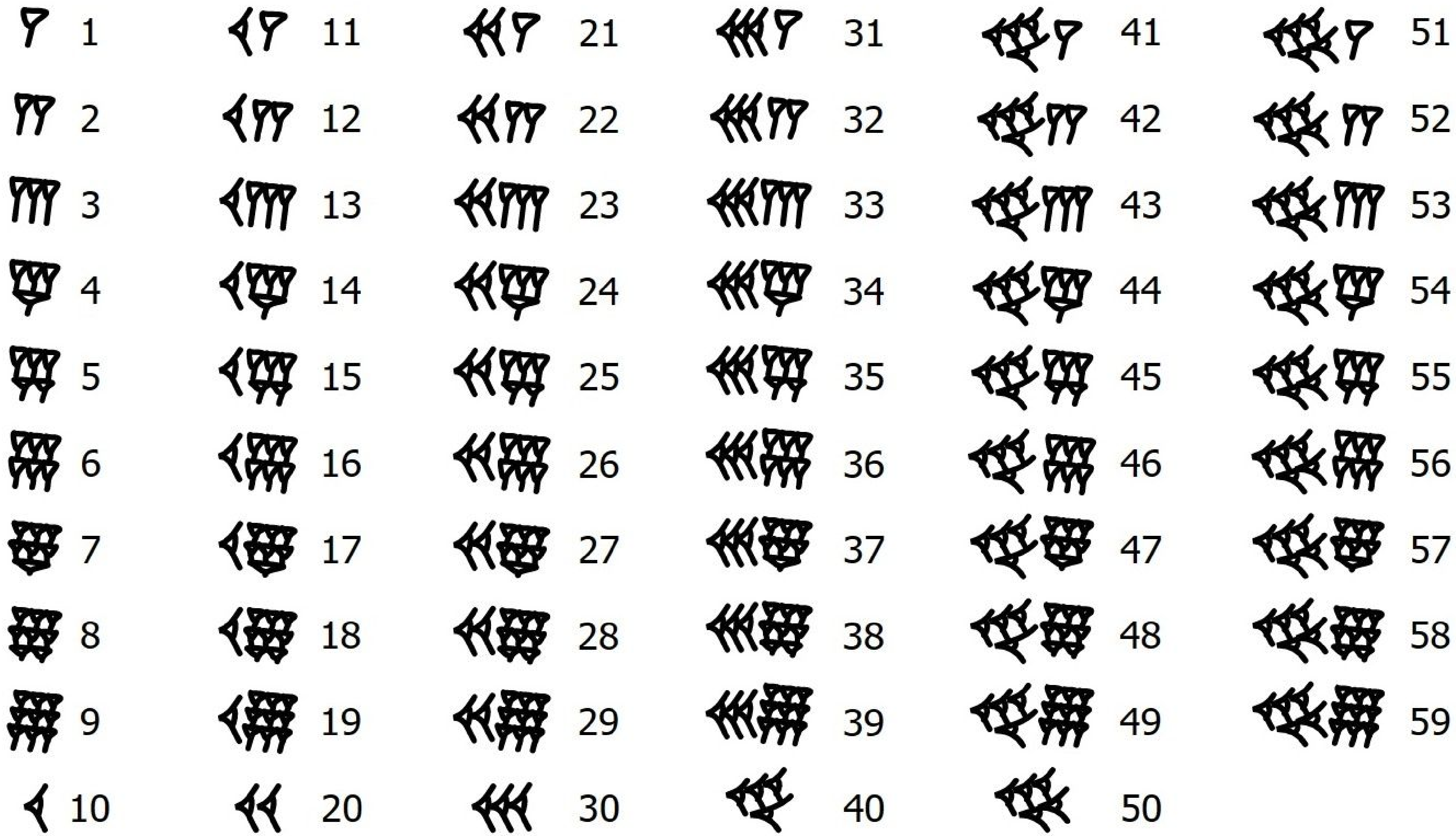


10 20 30 40 50

基本的には  と  の2文字で表記される。

例えば25は  と表記される。

バビロニアの数字

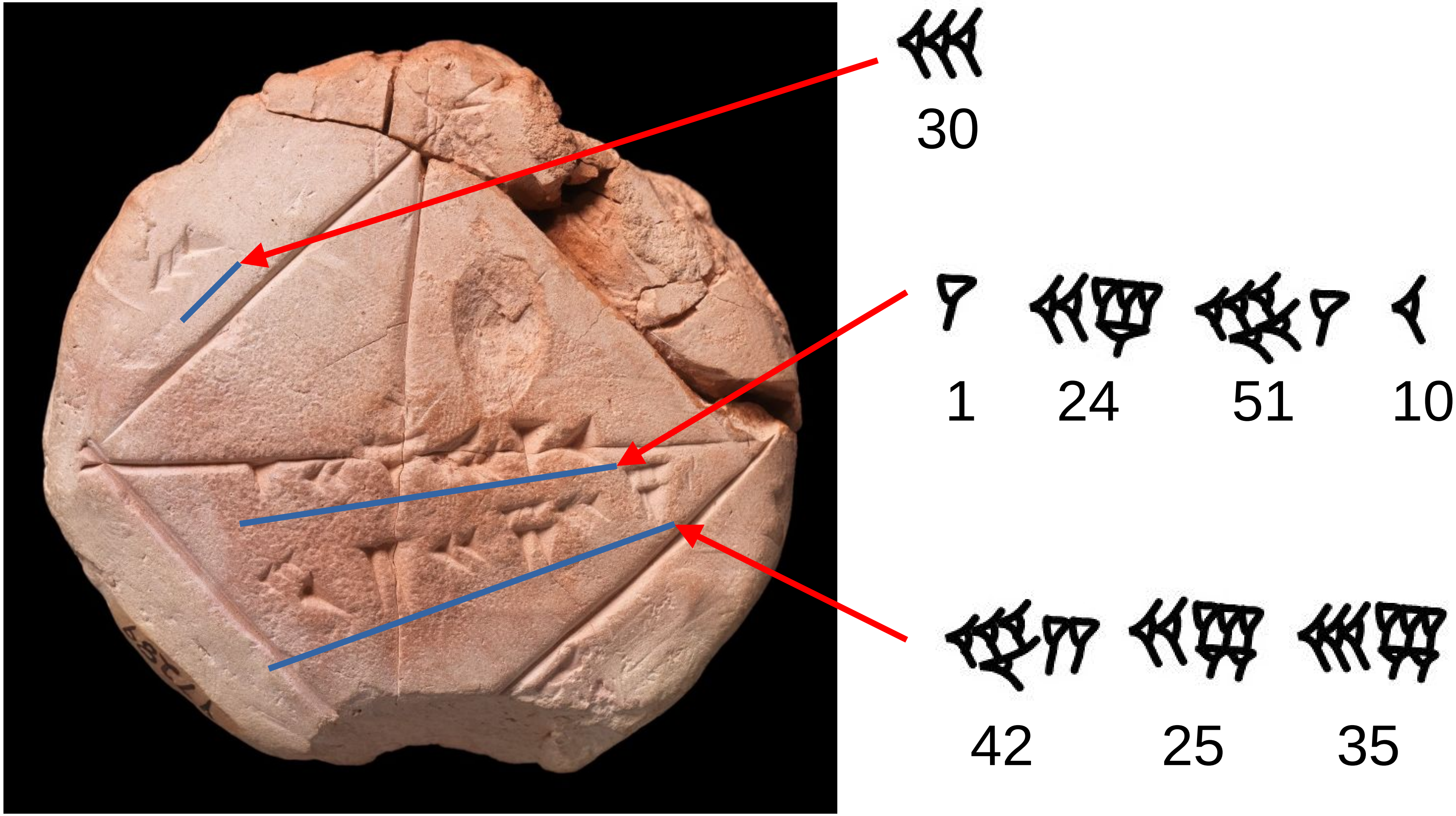


60進数なので今回必要なのは表の59文字だけ

バビロニアの数字 [3]

・60進数。
・小数点記号を使わない。
・ゼロ記号を持たない。

粘土板 YBC7289

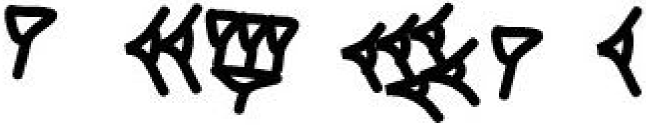


これらの数字は何を意味しているのか？

粘土板 YBC7289

60進数を現代の10進数に変換する。

30



1　24　51　10

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$$

= 1.41421296...　一夜一夜に人見頃

$\sqrt{2}$ に極めて近い値

42　25　35

$$42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$$

= 42.426388...

$30\sqrt{2}$ に近い値

疑問

古代バビロニア人はどうやって $\sqrt{2}$ を求めたのか?

答え→次の $\sqrt{2}$ に収束する数列を用いた。

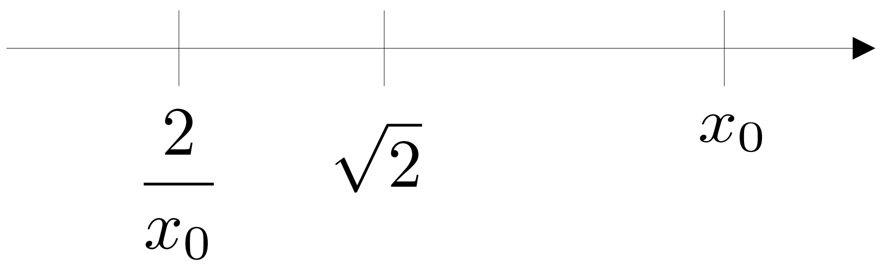
$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{2}{x_i}\right) \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

x_0 は $\sqrt{2}$ の初期推定値

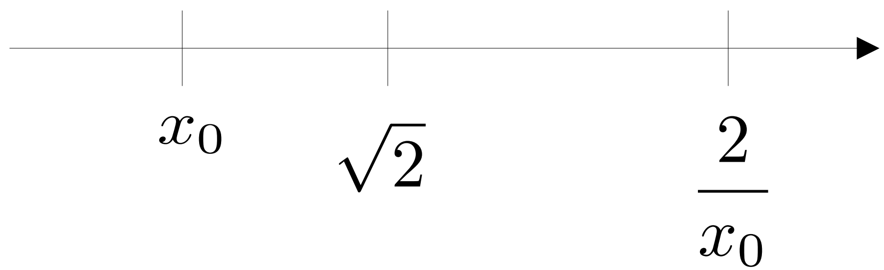
数列の直感的解釈 [4]

$\sqrt{2}$ の初期推定値 x_0 が与えられているとき、
次の推定値 x_1 をどうやって定めるのか？

$x_0 > \sqrt{2}$ のとき $\dfrac{2}{x_0} < \sqrt{2}$



$x_0 < \sqrt{2}$ のとき $\dfrac{2}{x_0} > \sqrt{2}$



いずれの場合も $\sqrt{2}$ は x_0 と $\dfrac{2}{x_0}$ の間にある。

x_0 と $\dfrac{2}{x_0}$ の平均値 $\dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{2}{x_0}\right)$ を次の推定値 x_1 とする。

具体的な計算

初期推定値 $x_0 = 1.5$ のとき

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = \frac{17}{12}$$ = 1.4166...

初期推定値 $x_0 = 1.4$ のとき

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1.4 + \frac{2}{1.4}\right) = \frac{99}{70}$$ = 1.414285...

手計算の範囲では、数列は $\sqrt{2}$ に近づく。

計算機による数値計算

数値実験をする。

$x_0 =$ 1.5 (1桁)

$x_1 =$ 1.4166... (3桁)

$x_2 =$ 1.414256... (6桁)

$x_3 =$ 1.4142135623746...(12桁)

$x_4 =$ 1.4142135623730950488016896..(24桁)

$x_5 =$ 1.41421356237309504880168872420969807856967187537 72...(48桁)

$x_6 =$ 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276416 0...(97桁)

$x_7 =$ 1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990732478462107038850387534327641572735013846230912297024924836055850737212644121497099935831413222665927505592755799950501152782060 86...(196桁)

数値実験によると数列は $\sqrt{2}$ に収束する。

本当に$\sqrt{2}$に収束するのか?

数列 $x_{i+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_i + \dfrac{2}{x_i}\right), \quad x_0 = \dfrac{3}{2}$

が $\sqrt{2}$ に収束することを証明する [5]。

x_i は正の有理数である。相加相乗平均の不等式より

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{2}{x_i}\right) > \sqrt{x_i \frac{2}{x_i}} = \sqrt{2}。$$

$x_i > \sqrt{2}$ より $\dfrac{2}{x_i} < \sqrt{2}$ となる。

次に誤差を $\varepsilon_i = x_i - \sqrt{2}$ とおく。

すると

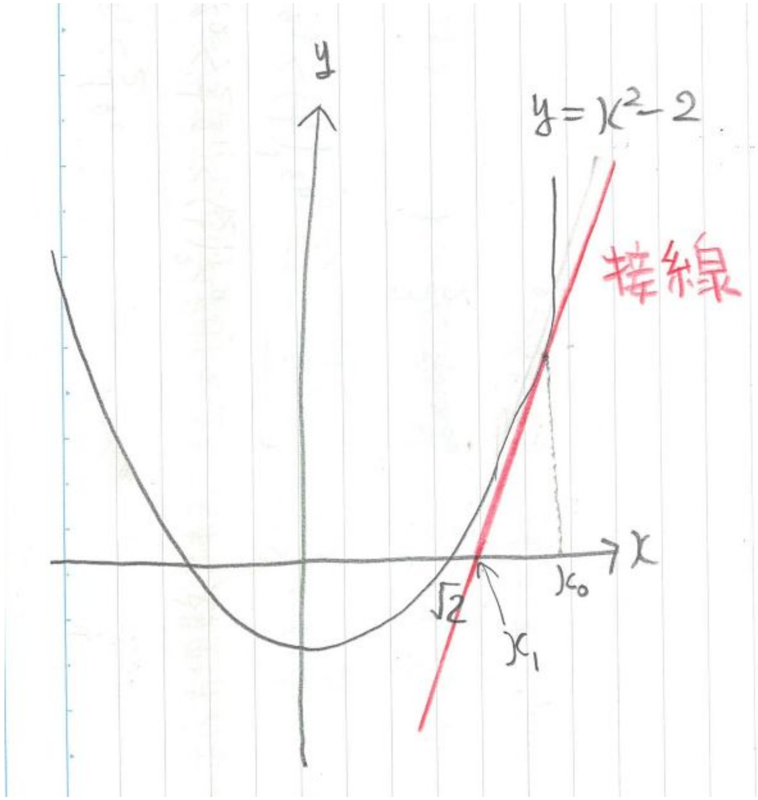
$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1} &= x_{i+1} - \sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{2}{x_i}\right) - \sqrt{2} \\
&< \frac{1}{2}\left(x_i + \sqrt{2}\right) - \sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_i。
\end{aligned}$$

したがって $0 < \varepsilon_i < \left(\frac{1}{2}\right)^i \varepsilon_0 \quad i = 1, 2, 3, \cdots$。

$i \to \infty$ のとき $\varepsilon_i \to 0$ つまり $x_i \to \sqrt{2}$ となる。

数列の現代的解釈

人類の英知である微分積分を駆使する [6]。



x_0は初期推定値。

接線とx軸の交点のx座標を次の推定値x_1とする。

今$f(x)=x^2-2$とおく。

接線は $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

つまり $y-(x_0^2-2)=2x_0(x-x_0)$ である。

$y=0$とおけば $x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{2}{x_0}\right)$ が得られる。

この結果は、今まで見てきた数列 $x_{i+1}=\frac{1}{2}\left(x_i+\frac{2}{x_i}\right)$ と一致する。

数列の現代的解釈

微分積分を駆使すれば、誤差解析も改善できる。

数列 $x_{i+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_i + \dfrac{2}{x_i}\right), \quad x_0 = \dfrac{3}{2}$ の誤差は、

$$0 < x_i - \sqrt{2} < 3d^{2^i}, \quad d = \frac{25}{784}$$ となる。

正しい数字の桁数が、1回の反復で約2倍に増えていく。
(確かに数値実験の現象として現れていた。)

このことを数列 x_i が $\sqrt{2}$ に2次収束するという。

めでたし、めでたし

発表を終了します。

めでたし、めでたし

発表を終了します。

とはなりません。

一般向けの説明としてはここで終了します。

けれど、今日の京アカはここでは終わりません。

何が問題か?

計算をもう一度見直す。

$$x_0 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{30}{60} = 1:30$$

$$x_1 = \frac{17}{12} = 1 + \frac{25}{60} = 1:25$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + 2\frac{12}{17}\right)$$

古代バビロニアでは17による割算ができなかった。
1:25が$\sqrt{2}$の近似値として使用されていた。

何が問題か?

古代バビロニアには足算、引算、掛算の概念はあったが、割算はなかった [3]。

割算ではなく、「逆数を掛ける」という計算をしていた。

例: 2で割るのではなく、0.5を掛ける。
　4で割るのではなく、0.25を掛ける。
　5で割るのではなく、0.2を掛ける。

古代バビロニアの逆数

古代バビロニアには小数点がないので、
逆数を60進数で考えるとき
a×(aの逆数)=(60のn乗), nは整数
という形を取る。

例
30の逆数は2。なぜなら30×2=60。
45の逆数は80＝1:20。なぜなら45×80=(60の2乗)。
3:45=225の逆数は16。なぜなら225×16=(60の2乗)。

逆数の表, 粘土板MS3874 [7]

3の逆数は20。

4の逆数は15。

5の逆数は12。

....

15の逆数は4。

16の逆数は3:45。

17の表記はなし。

18の逆数は3:20。

計算の全体像 [3]

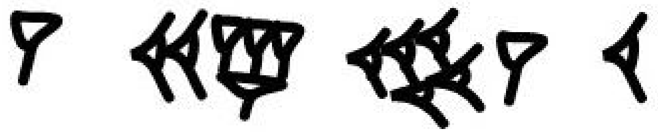
手順1. $\sqrt{2}$ に近くて逆数を持つ初期推定値 x_0 を求める。
答えは、$x_0 = 1:24:22:30$。

手順2. 数列 $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{2}{x_0}\right)$ を使う。

$x_1 = 1:24:51:15$ となる。

手順3. $x_1 = 1:24:51:15$ の精度計算をすると、
$1:24:51 \leqq \sqrt{2} \leqq 1:24:51:15$ が判明する。

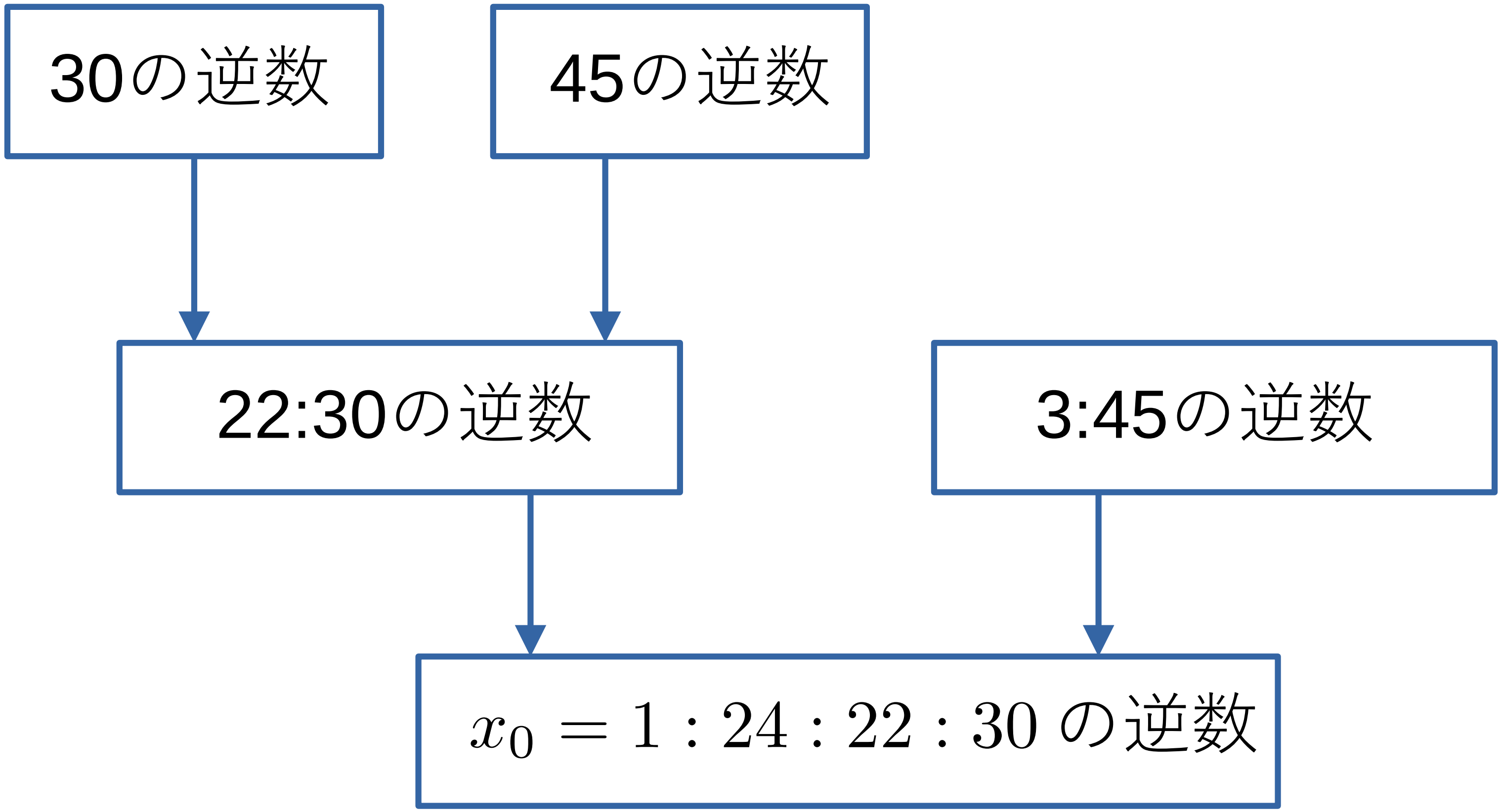
手順4. 1:24:51と1:24:51:15の重み付き平均値を取ると、
$\sqrt{2} \approx 1:24:51:10$ が判明する。

粘土板の数字  と一致する!

1　24　51　10

1:24:22:30の逆数

初期推定値 $x_0 = 1 : 24 : 22 : 30$ の逆数は下図の手順で計算する。



$a \times b$ の逆数

$\dfrac{1}{a \times b} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{b}$ なので

(a×bの逆数)＝(aの逆数)×(bの逆数)が成立する。

計算例 22:30の逆数を計算する。

22:30 ＝ 22×60+30
＝ 1350
＝ 30×45

(22:30の逆数)＝(30の逆数)×(45の逆数)
＝2×80
＝160
＝2:40

初期推定値 x_0 = 1:24:22:30の逆数は?

同様に1:24:22:30の逆数を計算する。

1:24:22:30＝3:45 × 22:30 なので

(1:24:22:30の逆数)＝(3:45の逆数)×(22:30の逆数)
＝16 × 2:40
＝42:40

1:24:22:30は粘土板の数字1:24:51:10に少し近いです。

初期推定値 $x_0 = $ 1:24:22:30の根拠 [8]

i

2 05	12
25	2 24
28 48	1 15
36	1 40
2 05	
4 10	6
25	2 24
14 24	2 30
36	1 40
4 10	
8 20	3
25	2 24
7 12	5
36	1 40
8 20	
16 40	9
2 30	24
3 36	1 40
6	10
16 40	
33 20	18
10	6
1 48	1 15
2 15	4
9	6 40
26 40	
33 20	
1 06 40	9
10	6
54	**1 06 40**
2 13 20	18
40	1 30
27	**2 13 20**
4 26 40	9
40	1 30
13 30	2
27	2 13 20
4 26 40	

ii

8 53 20	18
2 40	22 30
6 45	1 20
9	6 40
8 53 20	
17 46 40	9
2 40	22 30
3 22 30	2
6 45	1 20
9	6 40
8 53 20	
17 46 40	
35 33 20	18
10 40	1 30
16	3 45
5 37 30	
1 41 15	4
6 45	1 20
9	6 40
8 53 20	
35 33 20	
1 11 06 40	9
10 40	1 30
16	3 45
5 37 30	
50 37 30	2
1 41 15	4
6 45	1 20
9	6 40
8 53 20	
35 33 20	
1 11 06 40	
2 22 13 20	18
42 40	22 30
16	3 45
$\boxed{1\ 24\ 22\ 30}$	
25 18 45	16

iii

6 45	1 20
9	6 40
8 53 20	
2 22 13 20	
4 44 26 40	9
42 40	22 30
16	3 45
$\boxed{1\ 24\ 22\ 30}$	
12 39 22 30	2
25 18 45	16
6 45	1 20
9	6 40
8 53 20	
2 22 13 20	
4 44 26 40	
9 28 53 20	18
2 50 40	1 30
4 16	3 45
16	3 45
14 03 45	
21 05 37 30	
6 19 41 15	4
25 18 45	16
6 45	1 20
9	6 40
8 53 20	
2 22 13 20	
9 28 53 20	
18 57 46 40	9
2 50 40	1 30
4 16	3 45
16	3 45
14 03 45	
21 05 37 30	
3 09 50 37 30	2

粘土板 CBS1215を再構成したデータ。

1:24:22:30という数字が2度も出現する。

古代バビロニア人はこの数字を知っていた。

数列　$x_{i+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_i + \dfrac{2}{x_i}\right)$　の出番

初期推定値 $x_0 = 1:24:22:30$

として、次の推定値　$x_1 = \dfrac{x_0}{2} + \dfrac{1}{x_0}$　を計算する。

$$\frac{x_0}{2} = 42:11:15$$

$$\frac{1}{x_0} = x_0 \text{ の逆数} = 42:40$$

$$x_1 = 42:11:15 + 42:40$$

$$= 1:24:51:15$$

粘土板の数字1:24:51:10にかなり近づいてきました。

精度検査

$x_1 =$ 1:24:51:15を2乗して、精度を検査する。
古代バビロニアでは、いっきに2乗せず、一桁ずつ増やしながら計算した。
つまり、次の手順で計算した。

ステップ1. 1の2乗は、1。
ステップ2. 1:24の2乗は、1:57:36。
ステップ3. 1:24:51の2乗は、1:59:59:31:21 (2より少しだけ小さい)。
ステップ4. 1:24:51:15の2乗は、2:0:0:13:46:33:45 (2より少しだけ大きい)。

以上より、$\sqrt{2}$ は1:24:51以上1:24:51:15以下の値である。

粘土板の数字 1:24:51:10まであと一息。

1:24:51と1:24:51:15の平均を取る

1:24:51の2乗は1:59:59:31:21, これは2より約0:0:0:29小さい。
1:24:51:15の2乗は2:0:0:13:46:33:45, これは2より約0:0:0:13大きい。

29と13の比はざっくり見積もると2対1。

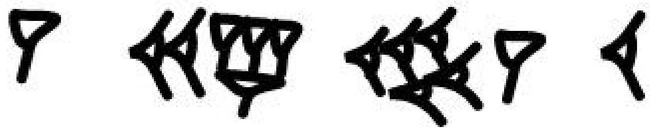
誤差を $\varepsilon_1 = 1:24:51 - \sqrt{2}, \quad \varepsilon_2 = 1:24:51:10 - \sqrt{2}$ とおく。
1:24:51の2乗 $\approx 2 + 2\sqrt{2}\varepsilon_1$
1:24:51:10の2乗 $\approx 2 + 2\sqrt{2}\varepsilon_2$

なので $\dfrac{1}{3}\varepsilon_1 + \dfrac{2}{3}\varepsilon_2$ は、ほぼゼロになる。

したがって、

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+\varepsilon_1\right) + \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}+\varepsilon_2\right) \\ &= \frac{1}{3} \times 1:24:51 + \frac{2}{3} \times 1:24:51:15 \\ &= 1:24:51:10\end{aligned}$$

粘土板の数字と一致する!



1 24 51 10

まとめ

- 古代バビロニアの粘土板を読み解いた。
- $\sqrt{2}$ が極めて高い精度で求められていた。
- 数列 $x_{i+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_i + \dfrac{2}{x_i}\right)$ と初期推定値 $x_0 = 1:24:22:30$ が重要な役割を果たしていた。

めでたし、めでたし

発表を終了します。

ありがとうございました。

質問や感想をどんどんお願いします。

諸説あります [9]

a を$\sqrt{2}$ の初期推定値とするとき

$$\sqrt{2} = \sqrt{a^2 - R} \approx a - \frac{R}{2a}$$

の関係が成立する。

計算例: a = 1.5とする.

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \sqrt{1.5^2 - 0.25} \\ &\approx 1.5 - \frac{0.25}{2 \times 1.5} \\ &= \frac{17}{12}\end{aligned}$$

諸説あります

$\frac{1}{17}$を $0:3:32$ で近似する。

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}}$$

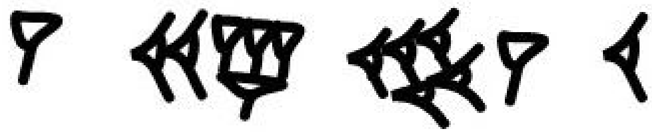
$$\approx \frac{17}{12} - \frac{1}{2\frac{17}{12}} \times \frac{1}{144}$$

$$= \frac{17}{12} - \frac{1}{24} \times \frac{1}{17}$$

$$\approx \frac{17}{12} - \frac{1}{24} \times 0:3:32$$

途中を省略

$$= 1:24:51:10$$



1 24 51 10

粘土板の数字と一致する!

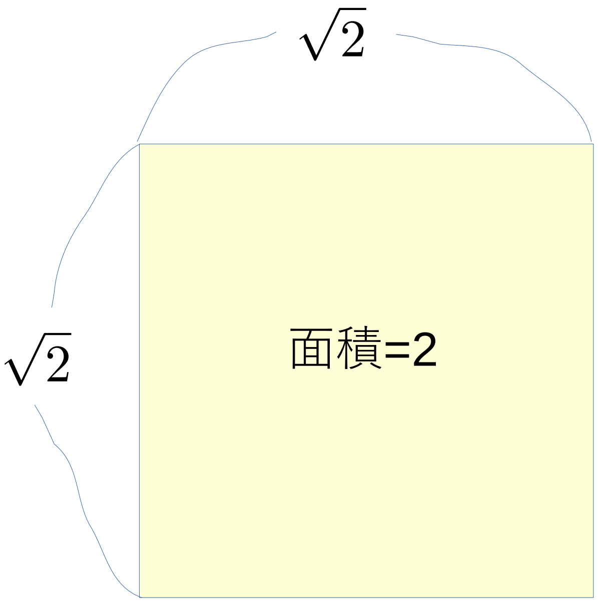
諸説あります

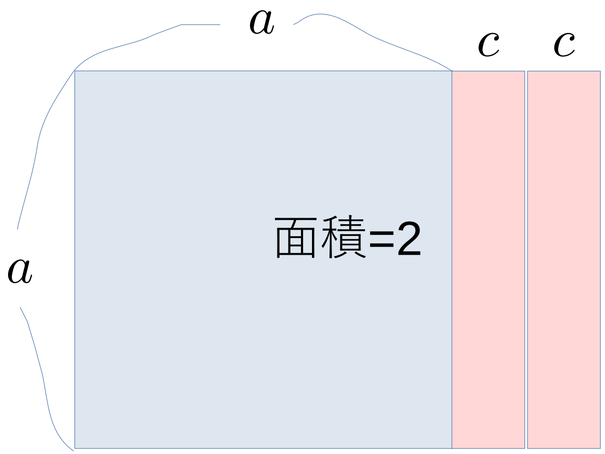
$\sqrt{2} = \sqrt{a^2 - R}$ のとき

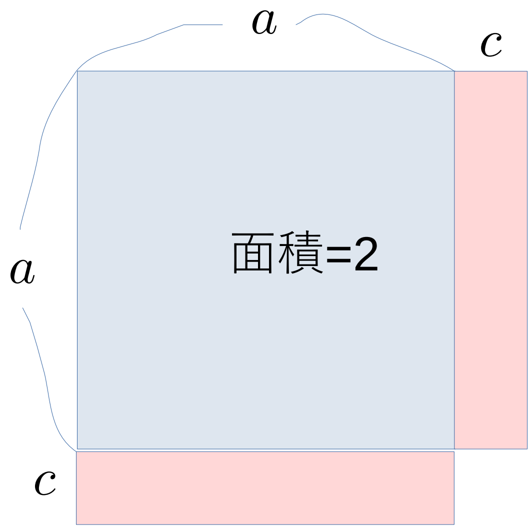
$$
\begin{aligned}
a - \frac{R}{2a} &= a - \frac{a^2 - 2}{2a} \\
&= \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)
\end{aligned}
$$

これは今まで使ってきた数列 $x_{i+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_i + \dfrac{2}{x_i}\right)$ と同じ。

数列の幾何学的解釈 [3]







$\sqrt{2}$ の初期推定値 a が与えられているとする。

$a < \sqrt{2}$ のとき

$$a(a+2c) = 2$$

となるようにcを定める。

$$\sqrt{2} \approx a + c$$
$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$$

今まで使ってきた数列 $x_{i+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_i + \dfrac{2}{x_i}\right)$ と同じ。

参考文献

[1] Wikipedia, YBC 7289, https://en.wikipedia.org/wiki/YBC_7289

[2] Wikipedia, Babylonian cuneiform numerals, https://en.wikipedia.org/wiki/Babylonian_cuneiform_numerals

[3] Buckle, D. (2022). How the estimate of 2 on YBC 7289 may have been calculated. Historia Mathematica., https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086022000477

[4] Osler, T. J. (1999). Extending the Babylonian algorithm. Mathematics and Computer Education, 33, 120-128.

[5] Maor, E. (2007). The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History. Princeton University Press.

[6] 亀谷俊司. (2004). 解析学入門. 朝倉書店.

[7] Proust, C. (2016). Floating calculation in Mesopotamia.

[8] Friberg, J. (2007). A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts. Springer.

[9] Mathematical Time Capsules: Historical Modules for the Mathematics Classroom. (2011). Mathematical Association of America.