地球の大きさを測定する

2023 年 3 月 6 日

1　はじめに

昔の人々がどのように地球の大きさを測定したかをまとめました。影を用いた測定法、星を用いた測定法、山を用いた測定法の 3 つがあります。以下では 3 つの測定法について詳細を示します。現在知られている地球の半径は 6371 km、赤道付近の円周は 40077 km です。

2　影を用いた測定法

[1] の 22 ページを参考にする。紀元前 240 年頃アレクサンドリアのエラトステネスは地球の円周を求めた。エラトステネスは太陽光線を用いた。彼は生誕地であるシエネでは夏至の正午に太陽が頭上に来ることを知っていた。なぜなら、そこでは太陽が深い井戸の底を照らしていたからだ。彼はまたアレキサンドリアでは垂直線に対して太陽が 7.2 度傾くことを知っていた。なぜなら真っすぐに立てた棒の影の長さを測ることで、棒と太陽光線のなす角を測ったからです。エラトステネスは太陽が地球の遥か向こうにあるので、その太陽光線が平行に地球へ到着すると仮定した。図 1 の影を付けた角度が対応した角度である。7.2° は 360° の 50 分の 1 なので彼は地球の円周はアレキサンドリアとシエネ間の距離の 50 倍と見積もった。アレキサンドリアとシエネ間の距離は 5000 stades なので地球の円周は 250000 stades である。1 stade を 160 メートルとして計算する [5] と、地球の円周は 40000km となる.

3　星を用いた測定法

[4] の第 2 章及び [2] の 27 ページを参考にする。ストア派哲学者であり数学者でもあったロドスのポセイドニオス (135 BCE–51 BCE) は、エラトステネスとは僅かに異なる手法を用いた。ポセイドニオスはカノープスという星を用いて地球の大きさを測定した。カノー

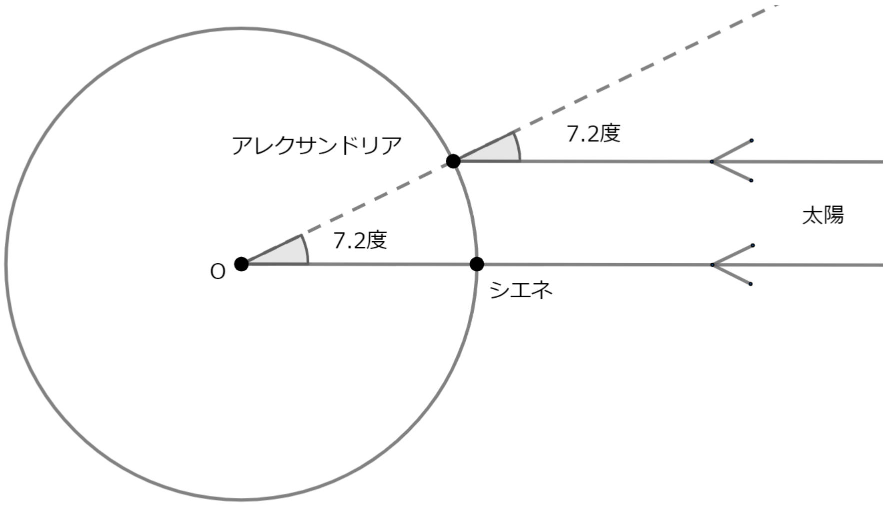

図 1　エラトステネスの測定方法

プスは太陽、シリウスに次いで全天で 3 番目に明るい恒星である。今、同じ経線上にあるロドスとアレクサンドリアの 2 つの都市を考える。ロドスではカノープスが丁度水平線上に見える。図 2 ではロドスにおける円の接線上にカノープスがある。ロドスから南に航行するとカノープスが星空の中で段々上にやって来る。アレクサンドリアではカノープスは水平線から最大仰角 7 度 30 分に現れる。ポセイドニオスはロドス–アレクサンドリア間の緯度差を θ とおいた。この角度 θ はアレクサンドリアにおけるカノープスの仰角に相当する。これはやっかい感じられるかもしれない。なぜなら図 2 ではアレクサンドリアにおけるカノープスの仰角が θ より少しだけ大きいからだ。しかしポセイドニオスは地球–カノープス間の距離がロドス–アレクサンドリア間の距離よりもずっと大きいと仮定した。この仮定は勿論真実である。そうするとアレクサンドリアにおけるカノープスの仰角が実質的に角度 θ に等しくなる。ポセイドニオスはロドス–アレクサンドリア間の距離として 5000 stades を用いた。すると地球の円周は

$$5000 \times \frac{360^\circ}{7.5^\circ} = 240000 \text{ stades} \tag{1}$$

となる。1 stade を 160 メートルとして計算する [5] と、地球の円周は 38400km, 半径は 6111.5km となる。

4　山を用いた測定法

[4] の第 2 章, [3], および [6] を参考にする。イスラムの数学者ビールーニー (973–1048) は高さが既知の山の頂上から水平線を見下ろすことで地球の円周を計算する手法を開発した。彼は著名なイスラム学者、数学者、天文学者、物理学者そして占星術師であった。彼の推定は 6340 km と引用されが、これは 6371 km の半径から誤差 1%以内にある。ビールーニーの手法は素晴らしく注目に値する。ビールーニーは地球が半径 R の完全な球体であると仮定した。山の頂上から見ると水平線が水平方向より下であることを彼は知ってい

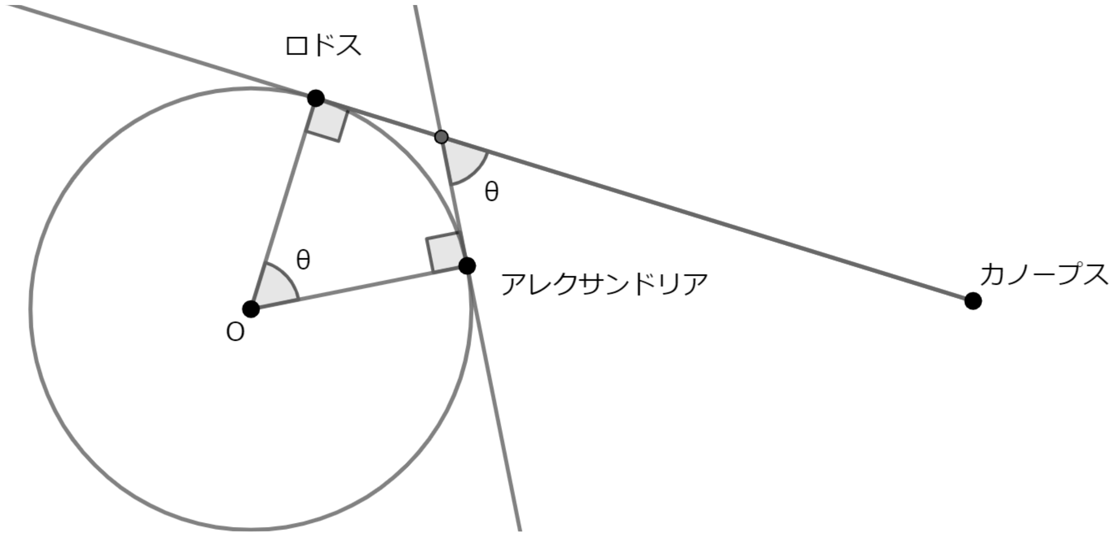

図 2　ポセイドニオスの測定方法

た。この角度は測鉛線が示す垂直の直角にすることで簡単に得られる。ビールニーは現在のパキスタンで適切な山を探した。彼は周囲の平らな土地から山の高さ h を解明し、水平方向からの水平線の傾斜角 θ を測定した。

まず最初に山の高さを測定する方法を図 3 を用いて紹介する。山の頂点を点 M, 山の高さを h とする。地点 A, B から山の頂点 M を見上げたときの仰角をそれぞれ α, β とする。角度 α, β はアストロラーベという器具で測定する。そして地点 A と地点 B の距離を d とおく。地点 A, B はともに平地にあるので、距離 d は正確に測定することができる。このとき直角三角形 OAM に注目すると

$$\tan\alpha = \frac{h}{\mathrm{OA}} \tag{2}$$

が得られる。同様に直角三角形 OBM に注目すると

$$\tan\beta = \frac{h}{\mathrm{OB}} = \frac{h}{\mathrm{OA}+d} \tag{3}$$

が得られる。式 (2) 及び式 (3) から OA を消去して高さ h を求めると、

$$h = \frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}d \tag{4}$$

が得られる。式 (4) は仰角 α、β、距離 d の 3 つの値から山の高さ h が求まることを示している。入力値である仰角 α, β そして距離 d が精確な値で得られ、タンジェントの値が正確に計算できれば、山の高さ h が正確に求まる。そしてこの式は現代の測量においても使用されている。

次にビールーニーが山の高度 h を用いて地球の大きさを推定した方法を図 4 に示す。山の頂上 M から見た水平線の傾斜角 θ を追加で測定する必要がある。図 4 より角 HOM は θ となる。 直角三角形 HOM に注目すると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}} = \frac{R}{R+h} \tag{5}$$

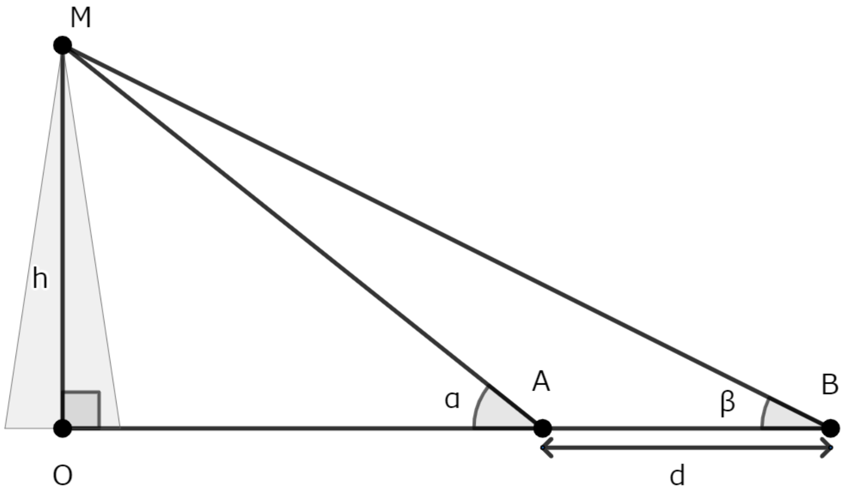

図 3　山の高度の測定方法

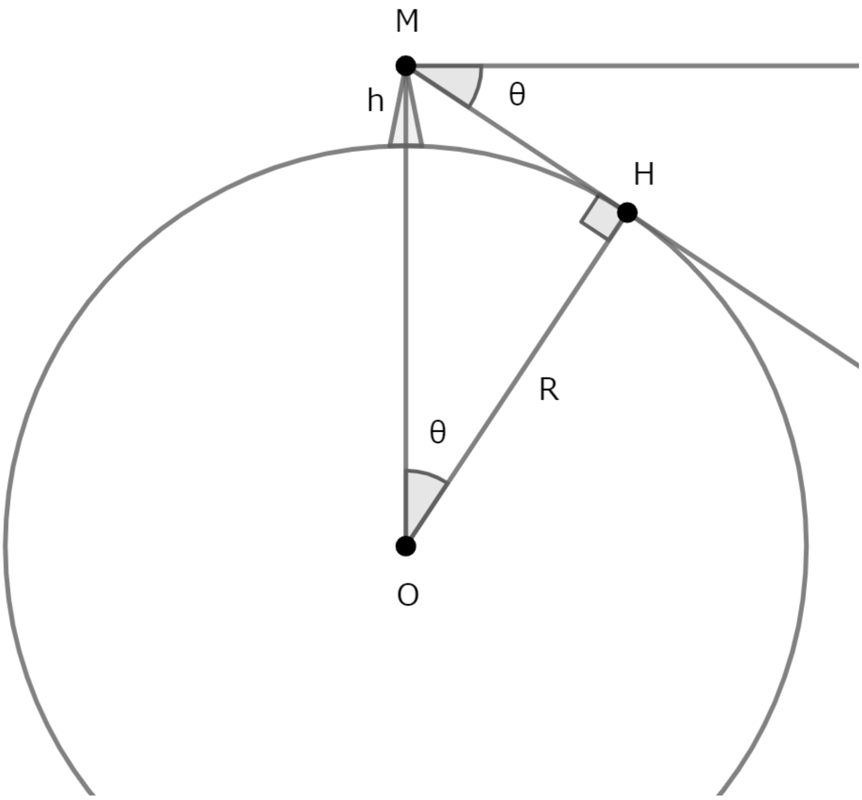

図 4　ビールーニーの測定方法

が得られる。この式 (5) から地球の半径 R を解くと、

$$R = \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}h \tag{6}$$

が得られる。ビールーニーはこの式 (6) を用いて山の高さ h と傾斜角 θ から地球の半径 R を求めた。

ここからの計算は [6] と [3] の 2 つの説がある。まず、[6] による説を紹介する。[6] では $\cos\theta$ のテーラー展開

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \frac{\theta^{10}}{10!} + \dots \tag{7}$$

を活用する。式 (6) に $\cos\theta$ のテーラー展開を適用すると、

$$R = \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}h = \frac{1+O(\theta^2)}{\theta^2/2+O(\theta^4)}h \approx \frac{2h}{\theta^2} \tag{8}$$

という近似式が得られる。この近似式に妥当な値として $h = 1000\text{m}$、$\theta = 1^\circ$ を代入する。すると、地球の半径 $R \approx 6565.6\text{km}$ と地球の円周 $\approx 41253.0\text{km}$ が得られる。

次に [3] の説を紹介する。[3] では次の cos の半角公式を用いた。

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}. \tag{9}$$

$\alpha = 45^\circ$、$\cos 90^\circ = 0$ で計算を始めて、半角公式 (9) を繰り返し適用していくと、以下の値が得られる。

$$\begin{aligned}
&\cos 45^\circ &&= 0.7071067811\\
&\cos 22.5^\circ &&= 0.9238795325\\
&\cos 11.25^\circ &&= 0.9807852804\\
&\cos 5.625^\circ &&= 0.9951847266\\
&\cos 2.8125^\circ &&= 0.9987954562\\
&\cos 1.40625^\circ &&= 0.9996988186\\
&\cos 0.703125^\circ &&= 0.9999247018\\
&\cos 0.3515625^\circ &&= 0.9999811752\\
&\cos 0.17578125^\circ &&= 0.9999952938\\
&\cos 0.087890625^\circ &&= 0.9999988234
\end{aligned}$$

ビールーニーは傾斜角が 0.7° になるような高さまで山を歩いた。そして彼は測定値を正確にするために何度も繰り返し測定した。その高さ h は 507m ぐらいだと思われる。$\cos 0.7^\circ \approx 0.99992$ で地球の半径 R を計算すると、$R \approx 6337\text{km}$ となる。

参考文献

[1]D. Acheson. *The Wonder Book of Geometry: A Mathematical Story*. Oxford University Press, 2020.

[2]D. Boccaletti. *The Shape and Size of the Earth: A Historical Journey from Homer to Artificial Satellites*. Springer International Publishing, 2018.

[3]WJA Colman. “95.05 Measuring the radius of the Earth”. In: *The Mathematical Gazette* 95.532 (2011), pp. 72–76.

[4]D. Jardine, A. Shell-Gellasch, and Mathematical Association of America. *Mathematical Time Capsules: Historical Modules for the Mathematics Classroom*. Mathematical Association of America, 2011.

[5]S. Kwok. *Our Place in the Universe: Understanding Fundamental Astronomy from Ancient Discoveries*. Springer International Publishing, 2017.

[6]Peter Lynch. *Al Biruni and the Size of the Earth*. 2021. URL: `https://thatsmaths.com/2021/06/10/al-biruni-and-the-size-of-the-earth/` (visited on 03/06/2023).