幻の数学イベント

NPO 法人京都アカデメイア 藤原大樹

2023 年 6 月 2 日 (金) 作成

目次

1 はじめに ・・・ 2
2 計算式が出てこない数学 ・・・ 3
2.1 コピー用紙の秘密 ・・・ 3
2.2 タレスの定理 ・・・ 8
2.3 3 つの円が重なるとき (common chords) ・・・ 11
2.4 ミケルの定理 ・・・ 12
2.5 パップスの定理 ・・・ 13
2.6 パスカルの定理 ・・・ 14
2.7 ブリアンションの定理 ・・・ 15
2.8 モンジュの定理 ・・・ 16
2.9 ピザの定理 ・・・ 17
2.10 定規とコンパスで線分を 3 等分する ・・・ 18
2.11 暗号理論 ・・・ 19
3 円周率 π の不思議な計算式 ・・・ 20
3.1 不思議な計算式の一覧 ・・・ 20
3.2 証明 ・・・ 20
参考文献 ・・・ 26

1　はじめに

今日は数学イベントにお越しいただきありがとうございます．4 カ月ぶりの発表ということで張り切っております．高校数学という制約内で私好みのテーマを収集し詰め込みました．今日は 3 つの大きなテーマがあります．コピー用紙の秘密, 円の幾何学, 円周率公式の 3 つです.

皆さんはコピー用紙で何を連想しますか？日常的によく使う長方形の紙, 安価な紙といったところでしょうか．実はコピー用紙は驚くべき幾何学構造を持っています．この構造は折紙やコンパスといった道具により明らかにされます.

次に円と聞いて何を連想しますか？多くの人にとって丸い形で話が終わってしまいます. ところが, 円を複数個使ったり多角形を円に内接外接させることで, 興味深い現象が現れます. 初等的な現象だけでもなんと 8 個の定理があります. この 8 つを知れば平面の円に関してはちょっとした数学マニアになれます.

続いて円周率公式です．円周率は円の直径に対する円周の長さの比率によって定義されます. そしてその値は約 3.14 です. 3.14 という値は小学校で習いましたが, どのように導出されたか気になりませんか？今回は高校数学の積分を用いてその謎に迫ります．更に円周率公式の中で BBP 公式という不思議な計算式があります. ぜひ皆さんに知って欲しい公式です．BBP 公式はたくさんありますが、簡単すぎず難しすぎないものを一つだけピックアップしました. この 1 つをじっくり観察することで、他の BBP 公式も理解できるようになります.

気合を入れて講義テキストを執筆したので、全部で 27 ページになってしまいました. とてもじゃないですが, 限られた時間内ではすべてを説明することはできません. どこまでできるか不明ですが、暫しお付き合いいただけると幸いです．質問は講義中に関わらず疑問に感じたらすぐにして下さい.

2　計算式が出てこない数学

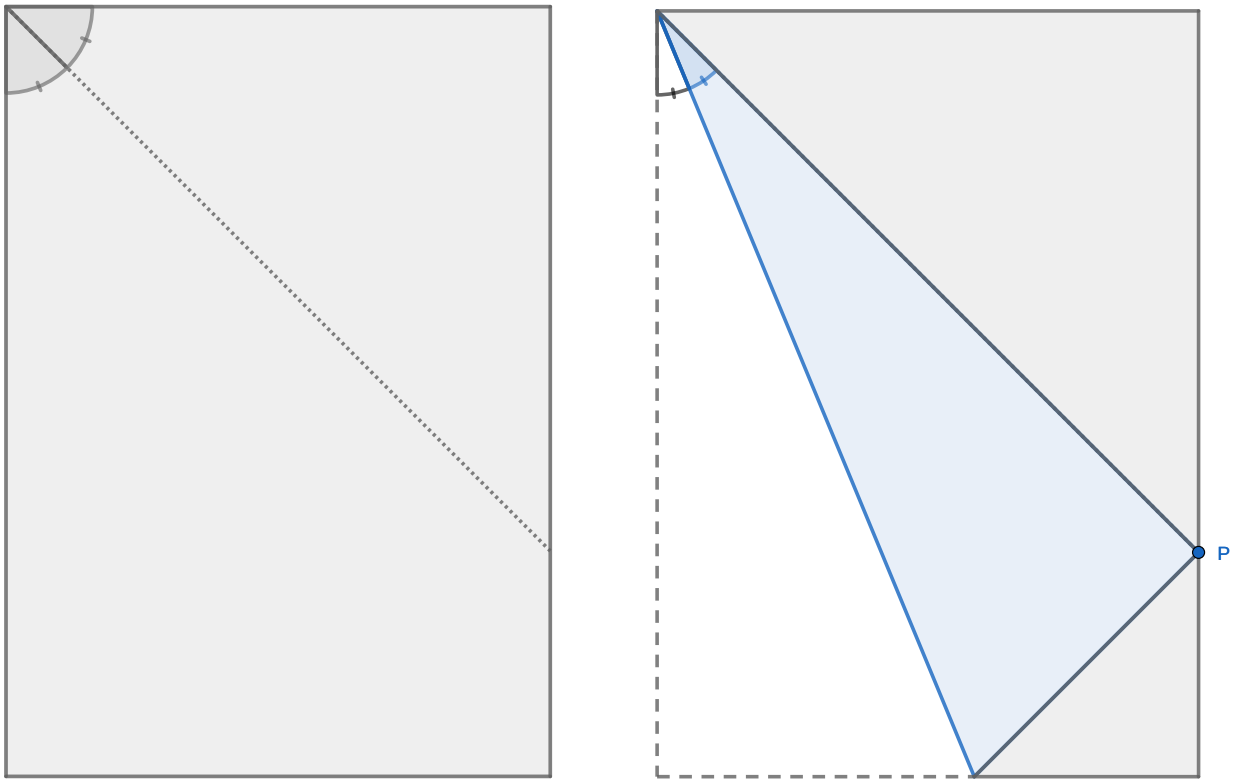
2.1　コピー用紙の秘密

　皆さんにコピー用紙の凄さを知ってもらいたいです.
A4 コピー用紙の縦と横の長さの比を知っていますか？
A4 サイズは 210mm x 297mm と規格で定められています.
297 を 210 で割ると, 1.4142857... です.
実はほぼ $\sqrt{2}$ なんです.
A4 サイズに限らず、A 判 B 判のコピー用紙はほぼ 1 対 $\sqrt{2}$ の長方形です.
この性質は極めて重要です.
そして、A0 サイズは 841mm x 1189mm と規格で定められています.
0.841 x 1.189 = 0.999949 で, A0 サイズの面積はほぼ 1 平方メートルです.
同様に, B0 サイズの面積はほぼ 1.5 平方メートルです.
前置きは以上です.

　ここで質問です.
コピー用紙の長辺を 4 分の 1 に折る方法を考えて下さい.
普通は半分折りを 2 回繰り返します.
他にいい方法がないか考えてみて下さい.
普通の人はたぶん思いつきません.
藤原が他の方法を実演する.
凄いと思いませんか？
参考文献は [15] の 18 ページです.

　続いて、コピー用紙の長辺を 3 分の 1 に折る方法を考えて下さい.
普通はアルファベット Z の形ができるように折ります.
他にいい方法がないか考えてみて下さい.
普通の人はたぶん思いつきません.
藤原が他の方法を実演する.
長辺だけでなく短辺も 3 分の 1 に内分する点が出てきます.
驚きの方法です.
参考文献は [18] の 78 ページです.

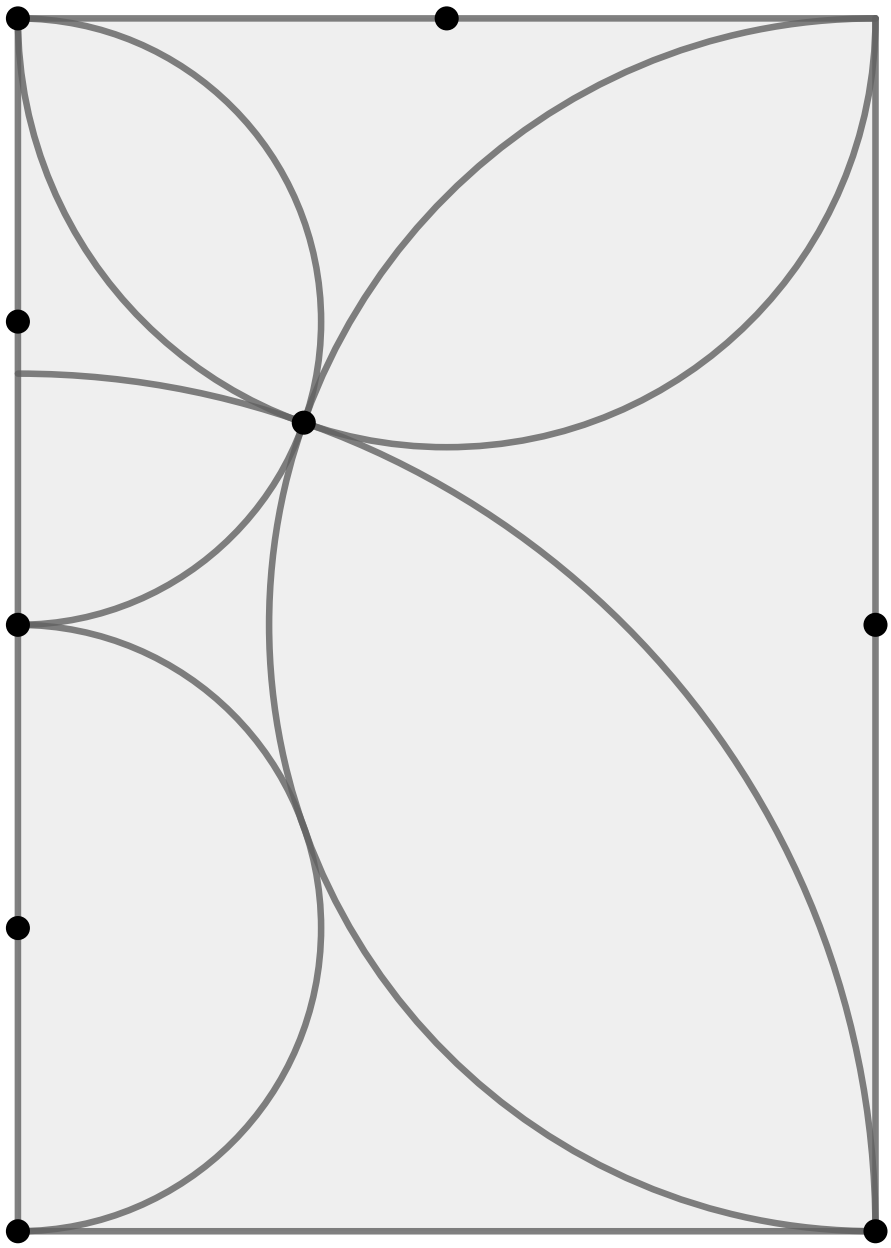
そして、コピー用紙を 2 回折るだけで興味深い現象が現れます.
参考文献は [21] の 88 ページ, [12] の 9 ページ及び [5] の 10 ページです.



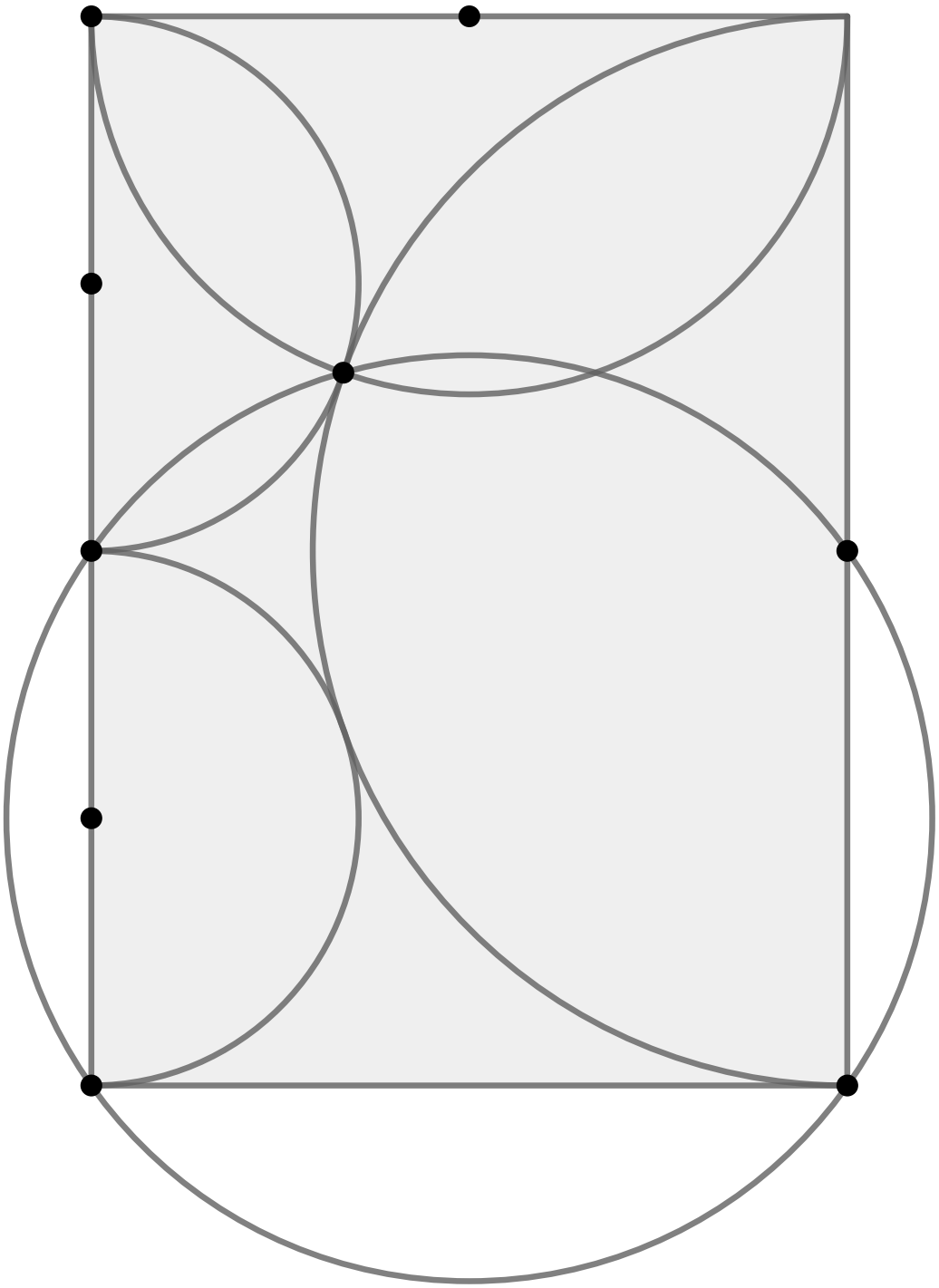
(a) その 1　　(b) その 2

図 1: コピー用紙の構造

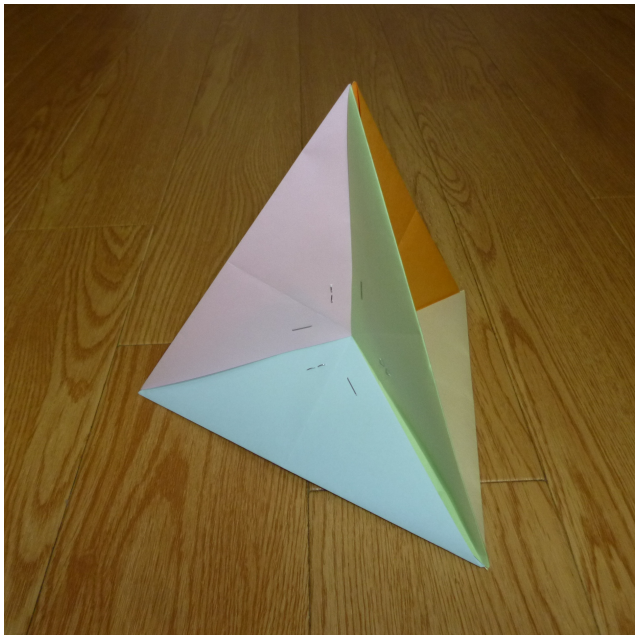
今度はコピー用紙にコンパスで作図すると面白い図が描けます.
[14] の 29 ページ及び [15] の 4 ページを参考にします.



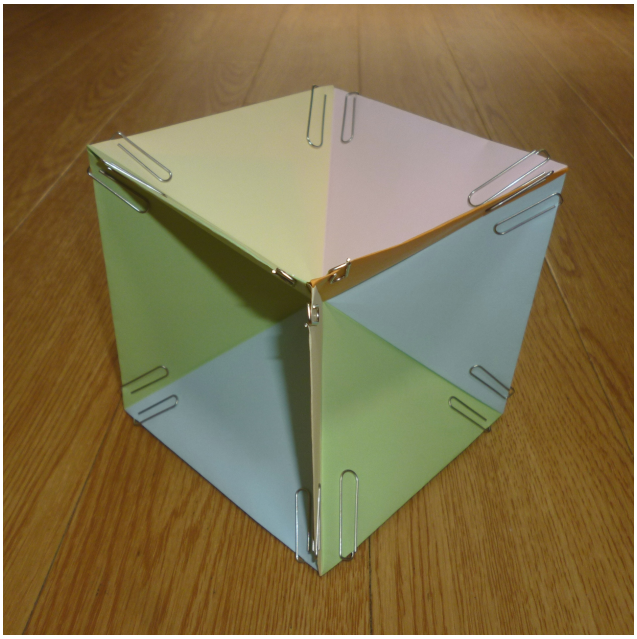
続いて [14] の 30 ページ及び [15] の 5 ページを参考にします.



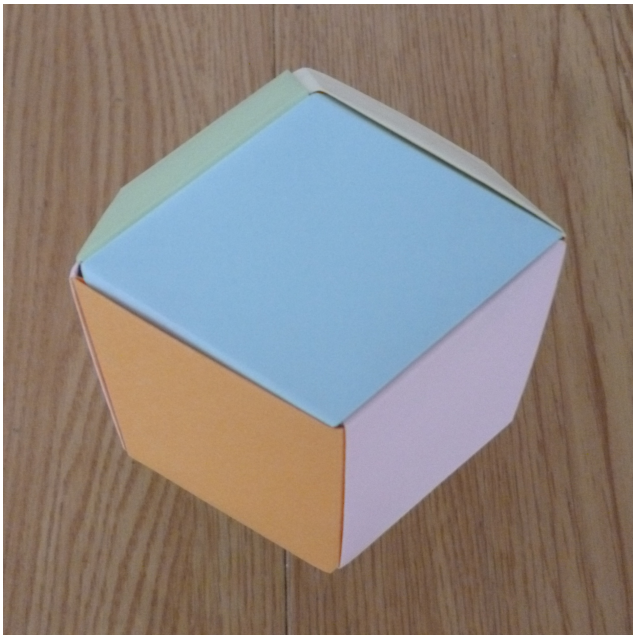
そして, コピー用紙は多面体折紙との相性が良いです.
特に正 4 面体, 立方体及び菱形 12 面体はエレガントに折れます.
正 4 面体, 立方体及び菱形 12 面体の折紙の写真を下に示します.
正 4 面体の参考文献は, [16] です.
立方体の参考文献は, [3] の 74 ページ及び [21] の 90 ページです.
菱形 12 面体の参考文献は, [11] の 100 ページ及び [13] です.



(a) 正 4 面体の折紙



(b) 立方体の折紙



(c) 菱形 12 面体の折紙

図 2: コピー用紙による多面体折紙

2.2　タレスの定理

小学生でも知っている平面幾何の話をさせて下さい.

定理
三角形の内角の和は 180 度である.

これは非常に有名でかつ重要な数学の定理です. しかし, これはホントに正しいでしょうか？気になります. 実験をしてみましょう.
藤原が紙をちぎって実演する.
そして実は紙をちぎらないでも確認する方法があります. その方法を以下の図で示します.
参考文献は, [6] の 43 ページ及び [19] の 2 ページです.

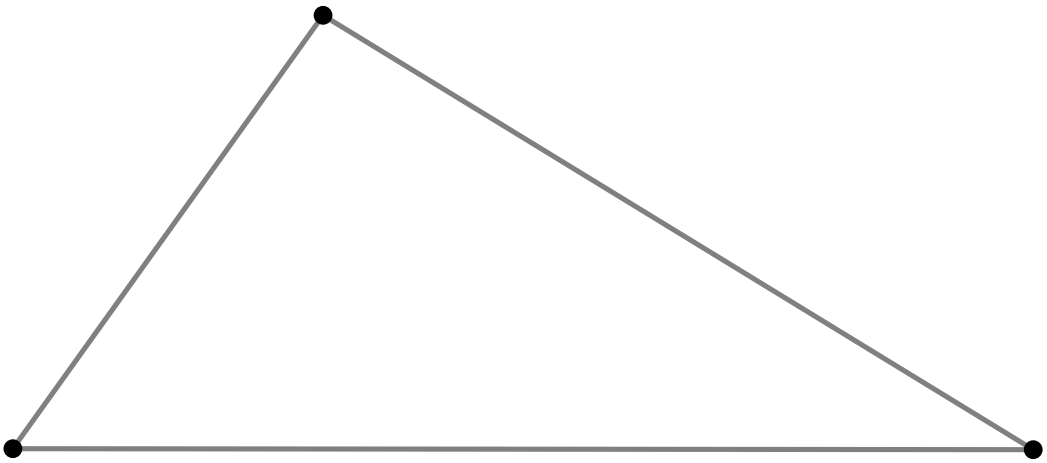


図 3: 3 角形の内角 その 1

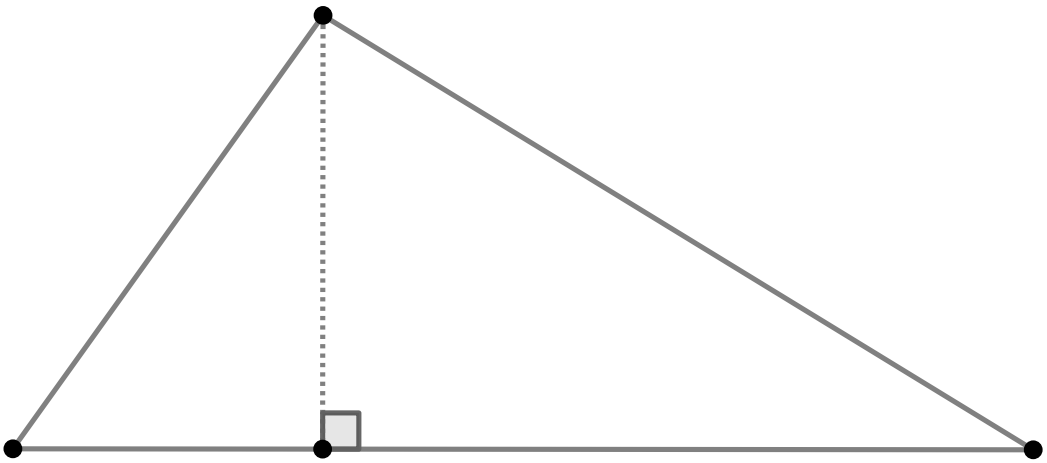


図 4: 3 角形の内角 その 2

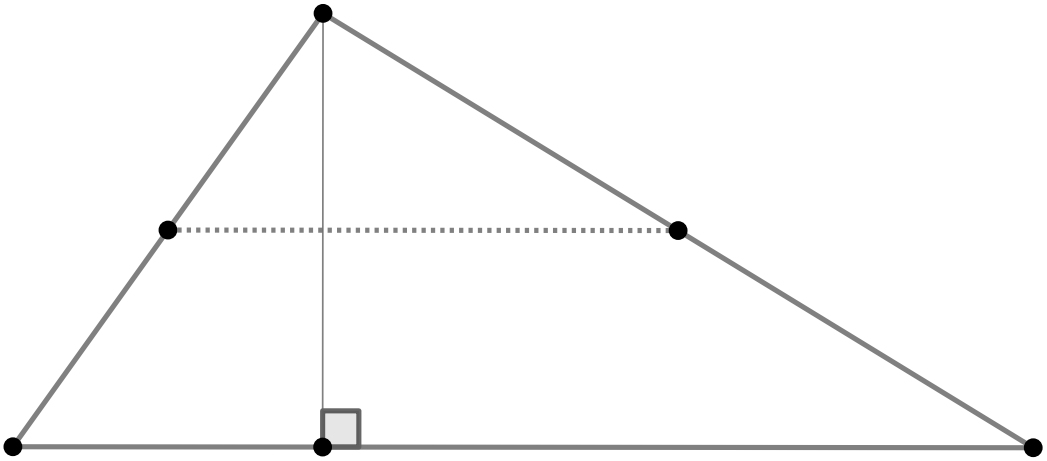


図 5: 3 角形の内角 その 3

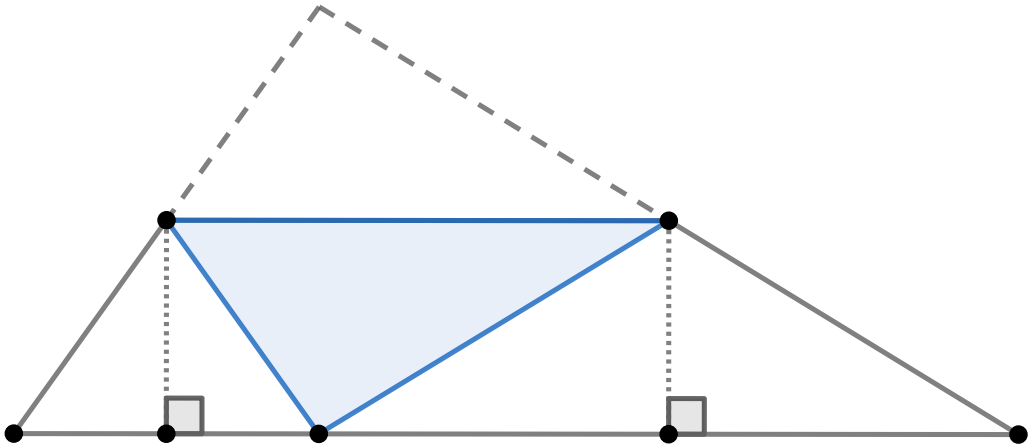


図 6: 3 角形の内角 その 4

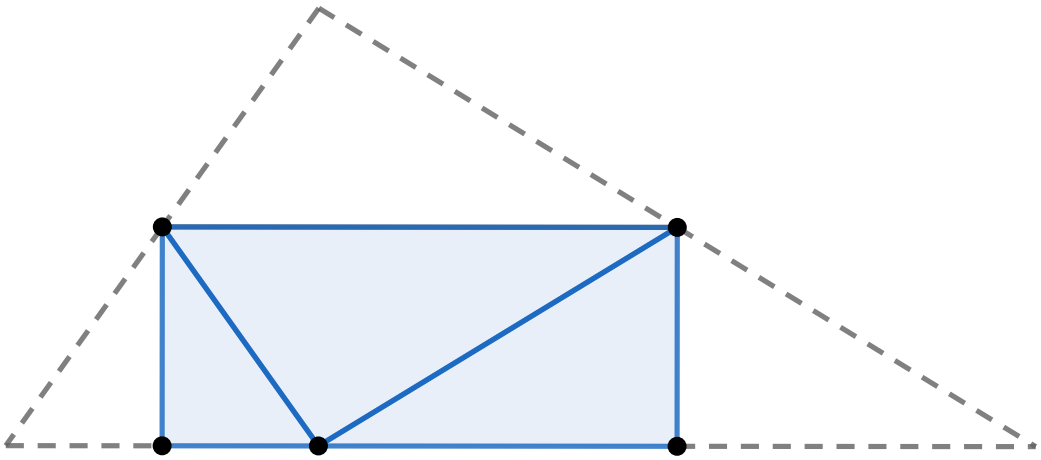


図 7: 3 角形の内角 その 5

続いてタレスの定理です．これは円に関する私好みの定理です．

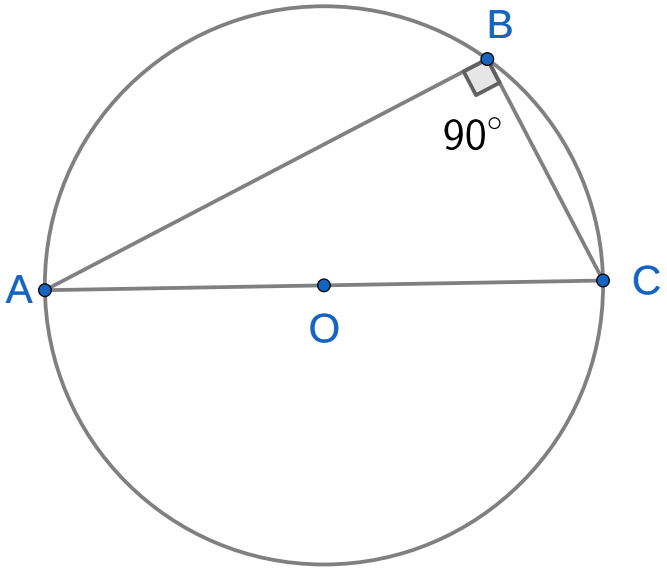


図 8: タレスの定理

この定理の証明のエッセンスは次の図です． 証明には三角形の内角の和が使われます．三角形 ABC の内角の和は $180^\circ = \alpha + \beta + (\alpha + \beta)$ となる．したがって $\alpha + \beta = 90^\circ$ である．

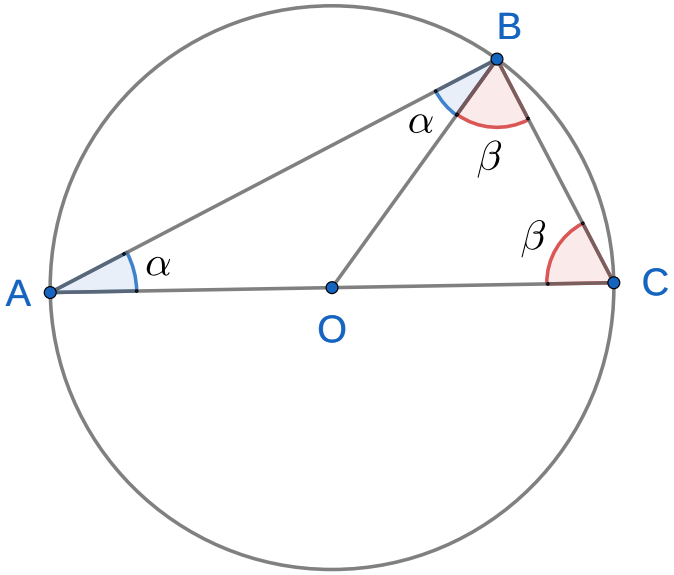


図 9: タレスの定理の証明

参考文献は [1] の第 4 章です．

2.3　3 つの円が重なるとき (common chords)

次も私のお気に入りの定理です．定規とコンパスを使って何度も作図しました．参考文献は [1] の第 31 章です．

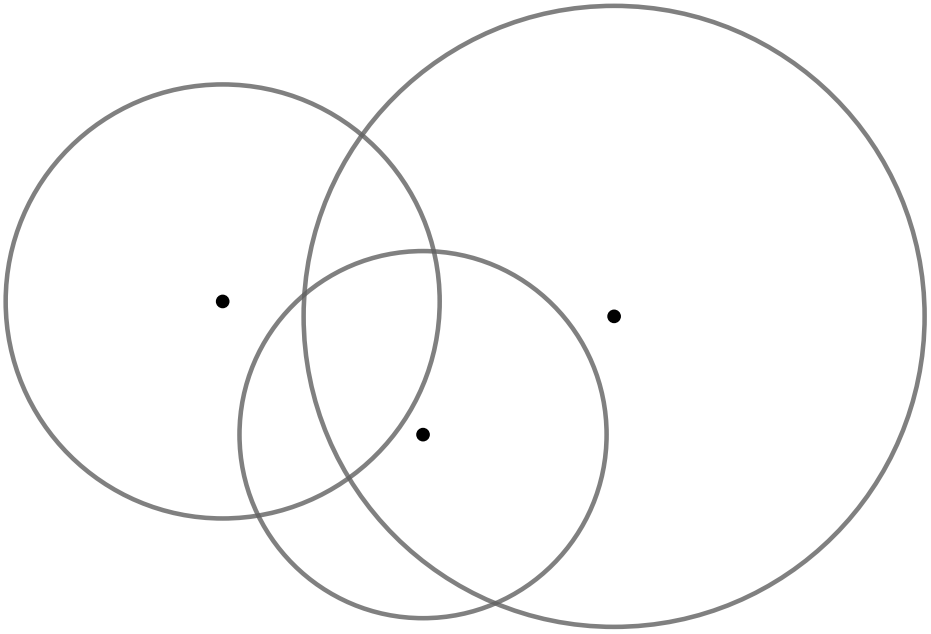


図 10: 3 つの円 その 1

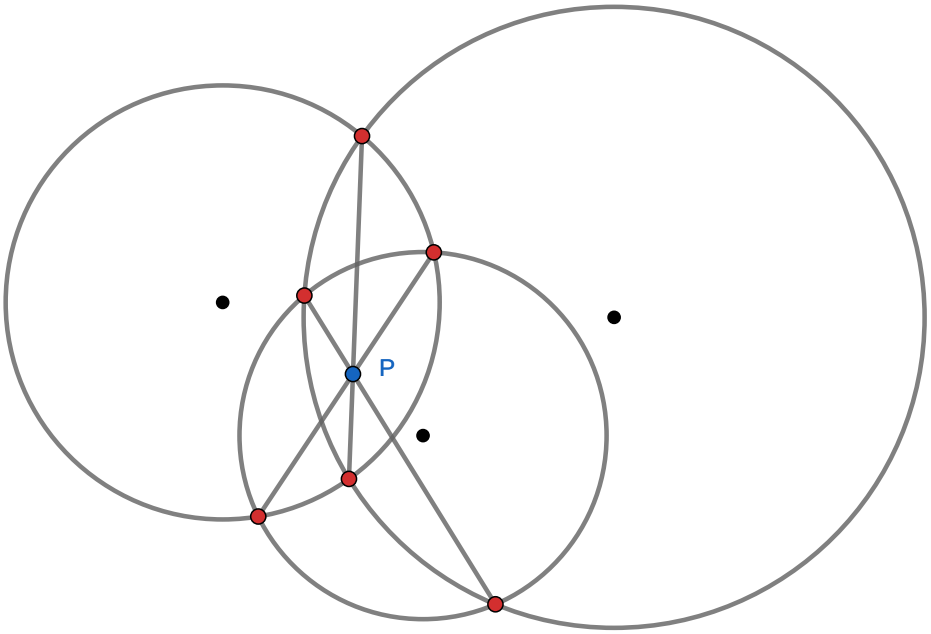


図 11: 3 つの円 その 2

2.4　ミケルの定理

[1] の第 31 章を参考にする.

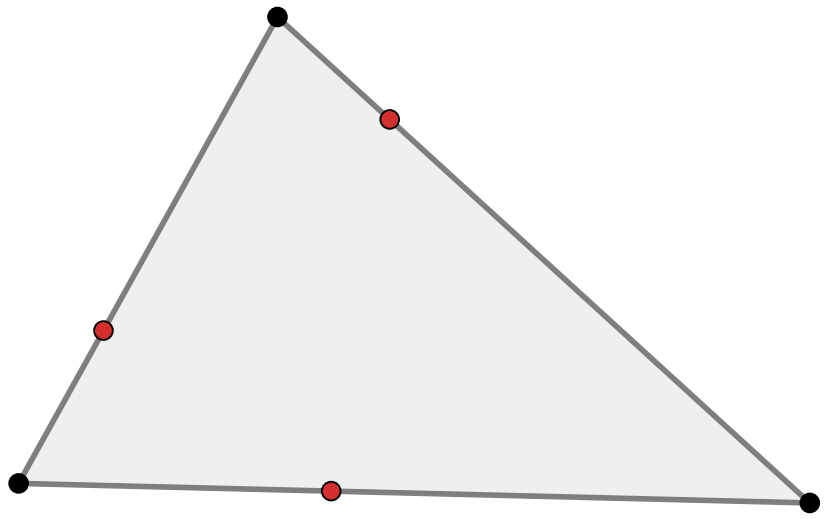


図 12: ミケルの定理 その 1

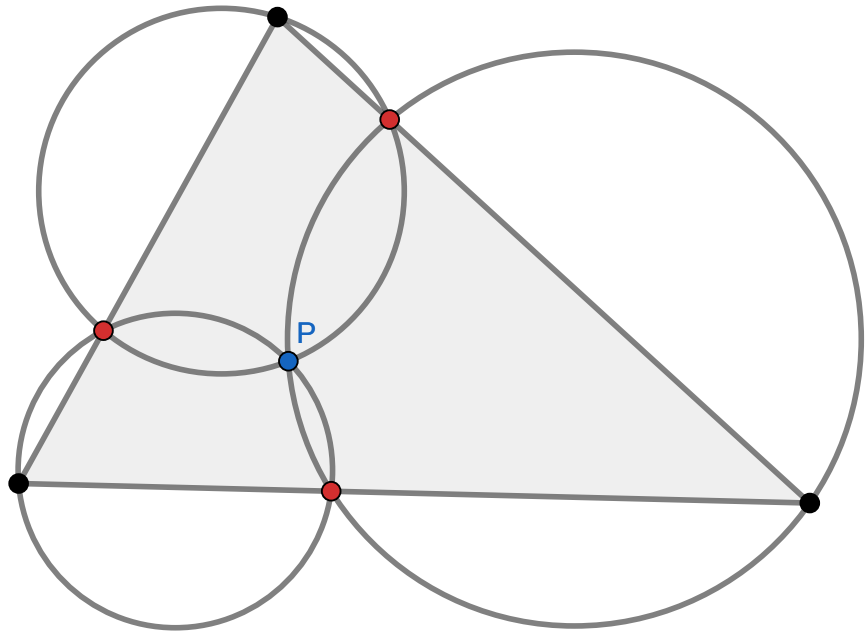


図 13: ミケルの定理 その 2

2.5 パップスの定理

[1] の第 32 章を参考にする.

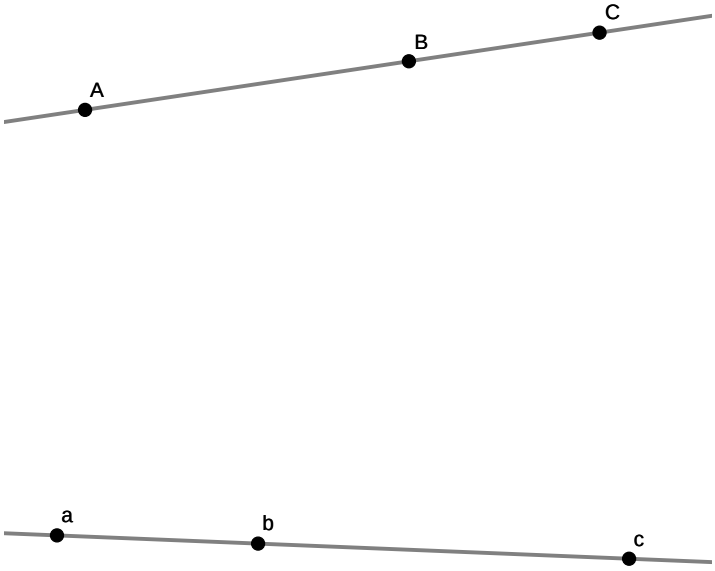


図 14: パップスの定理 その 1

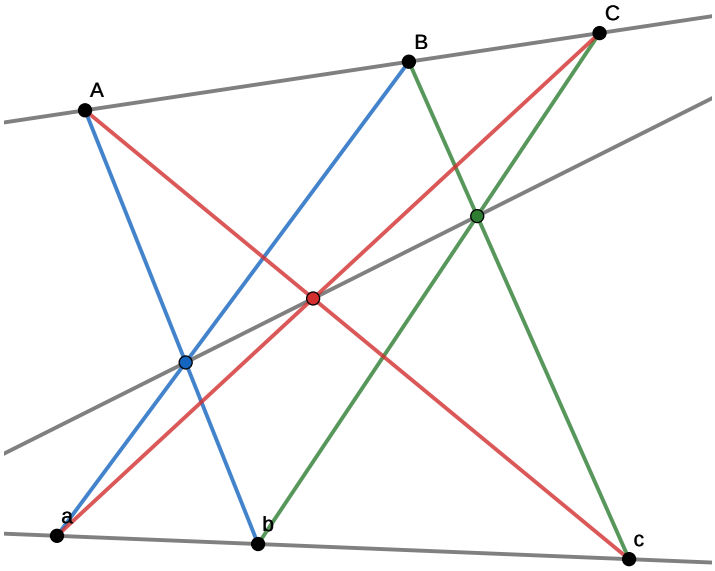


図 15: パップスの定理 その 2

2.6 パスカルの定理

[10] の第 3 章を参考にする.

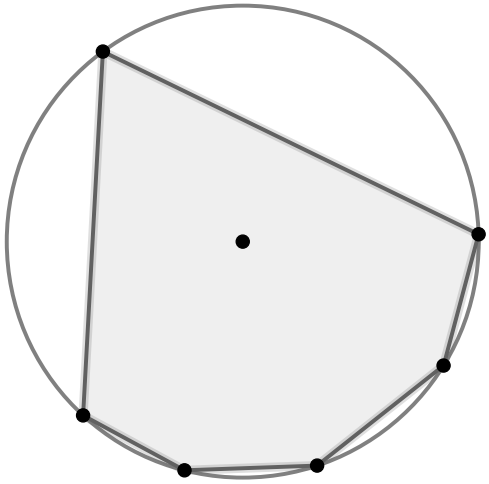


図 16: パスカルの定理 その 1

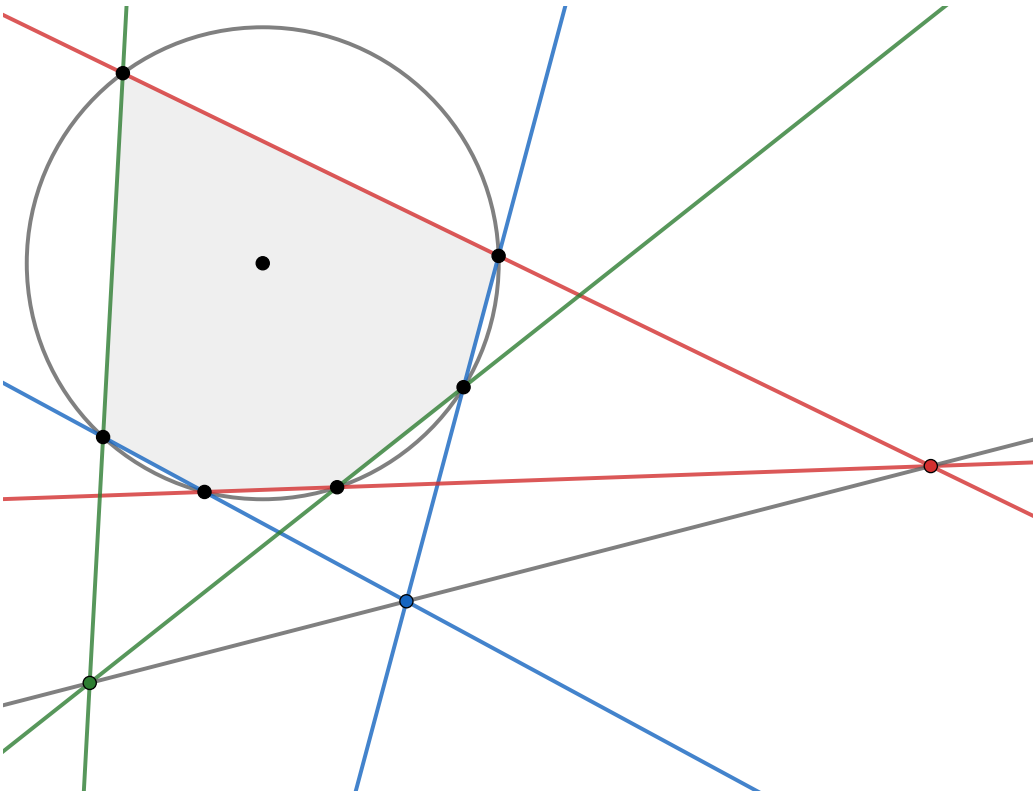


図 17: パスカルの定理 その 2

2.7 ブリアンションの定理

[10] の第 3 章を参考にする.

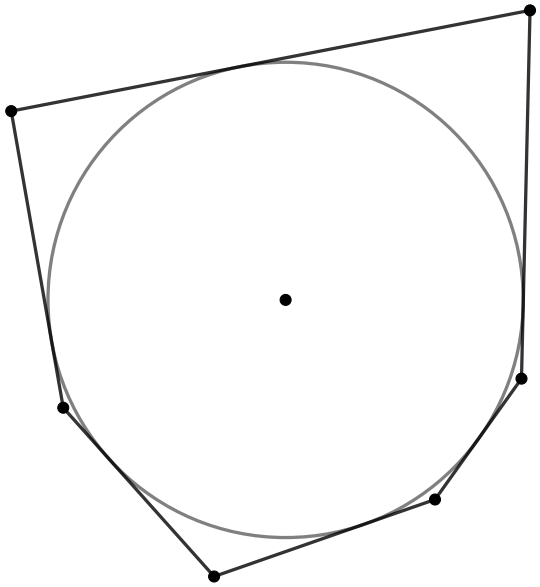


図 18: ブリアンションの定理 その 1

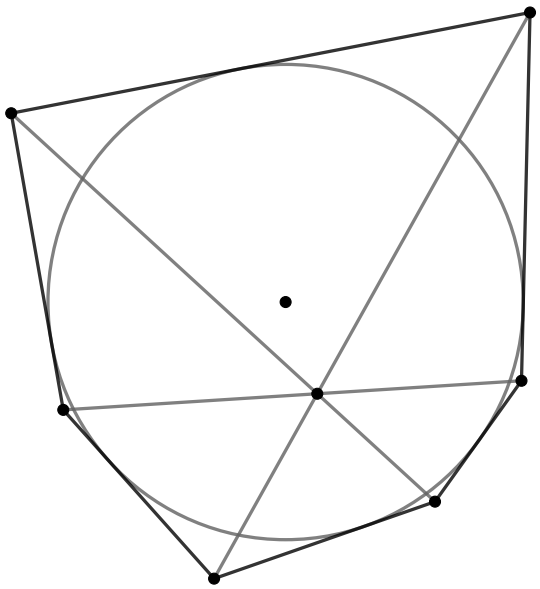


図 19: ブリアンションの定理 その 2

2.8 モンジュの定理

[17] の 154 ページを参考にする.

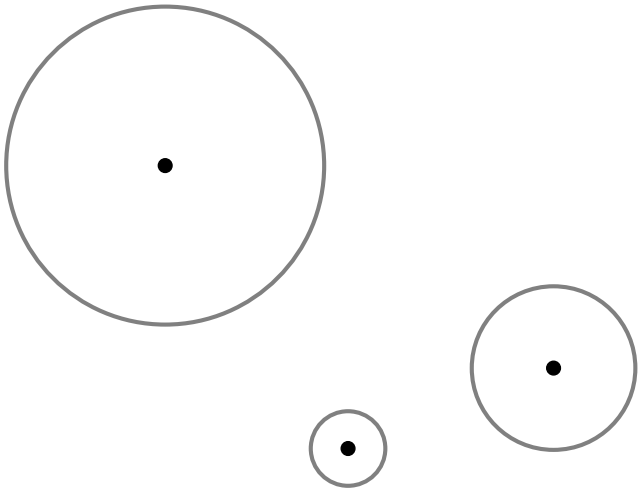


図 20: モンジュの定理 その 1

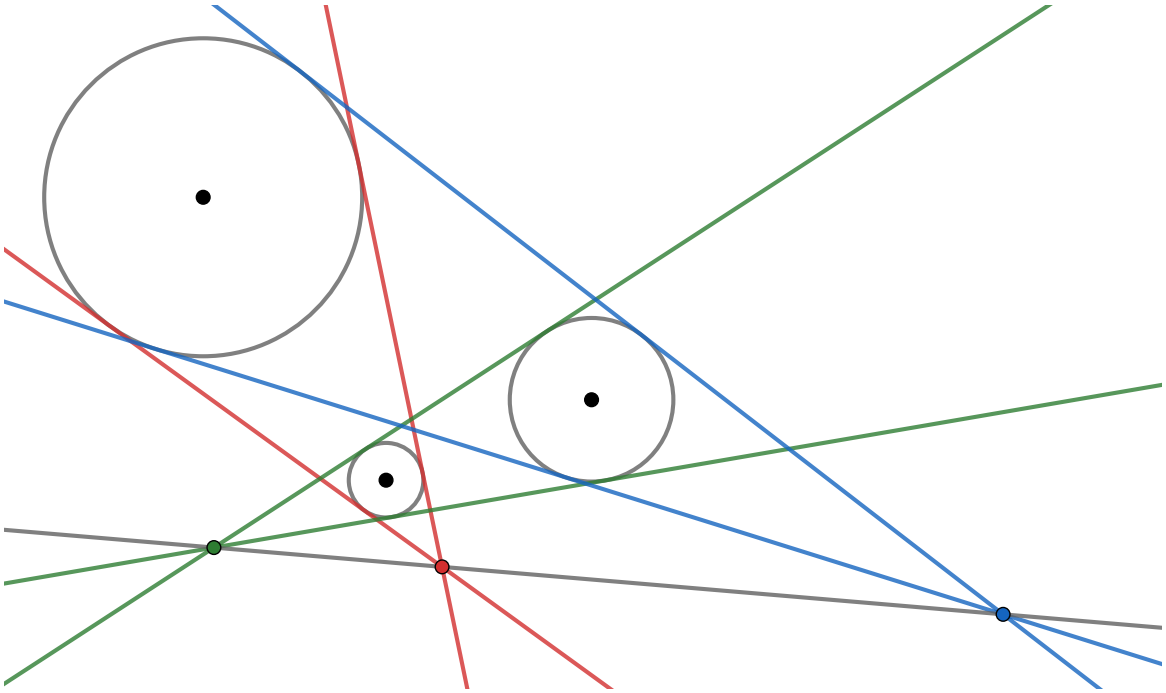


図 21: モンジュの定理 その 2

2.9　ピザの定理

[8] の 27 ページ及び [4] の第 8 章を参考にする.
水色部分とピンク色部分の面積が等しい.

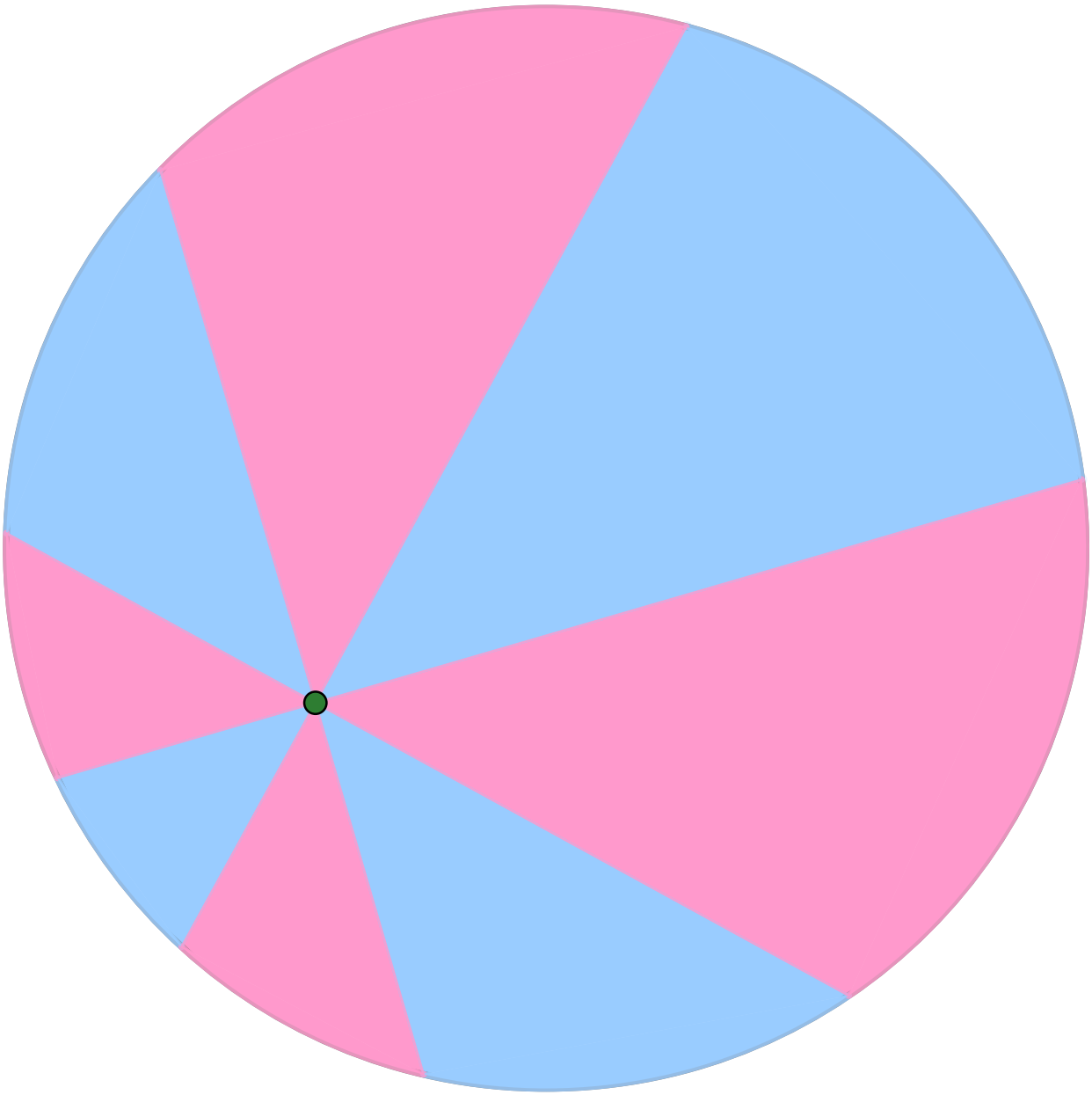


図 22: ピザの定理

2.10　定規とコンパスで線分を 3 等分する

定規とコンパスによる作図をします．多くの方は定規とコンパスで線分を 2 等分する方法を中学校で習っているはずです．けれど、線分を 3 等分する方法は知ってますか？意外と知られていないので, その方法の一つを以下に示します．[9] の 34 ページ及び [22] を参考にしました.

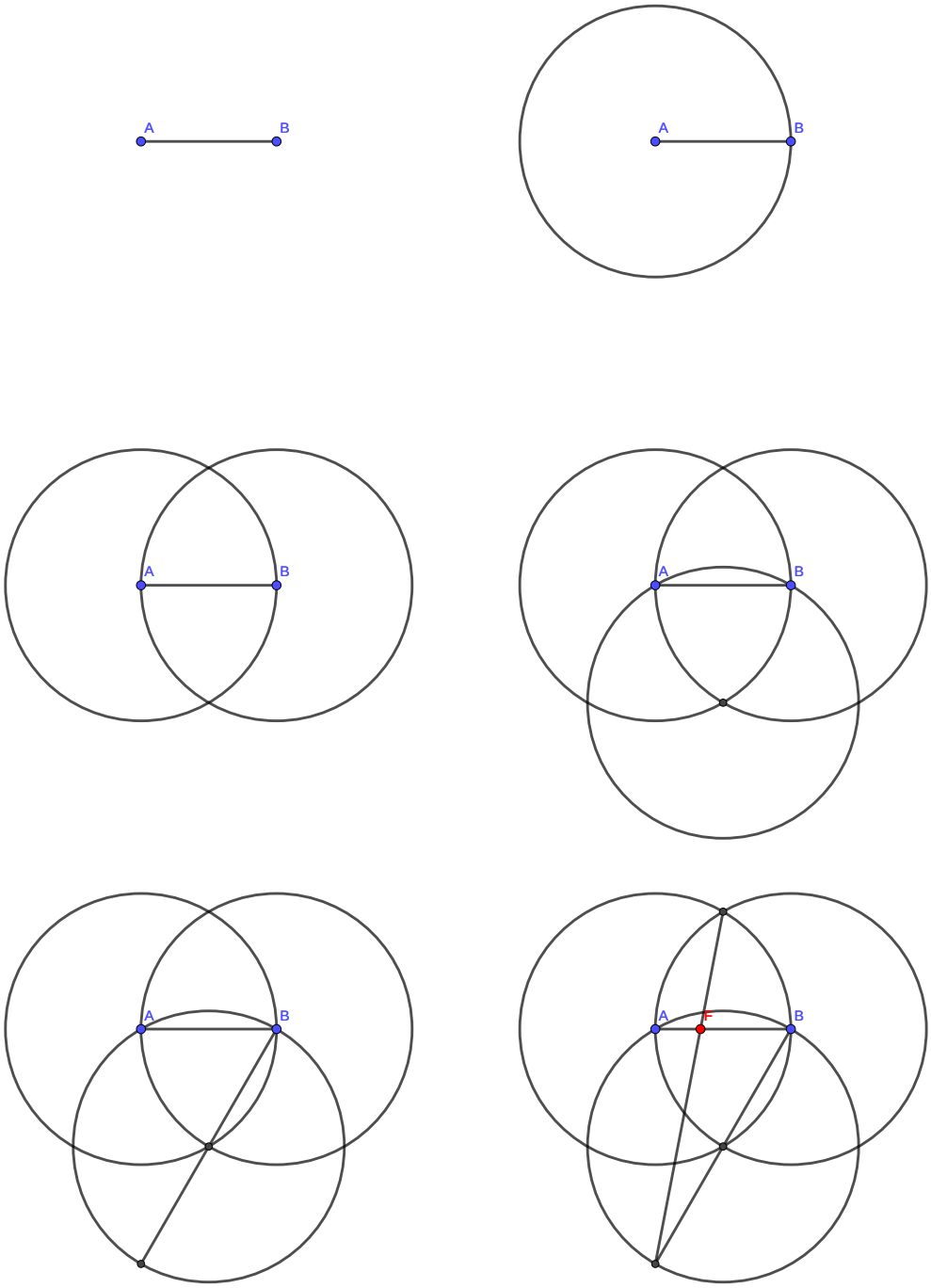


図 23: 線分を 3 等分する方法

2.11 暗号理論

計算式が出てこない数学を暗号理論で締めくくります．今 n 人の人々がいて，その n 人を対象にアンケートを取りたいとします．質問は YES/NO の 2 択で回答できるものとします．質問の回答が周囲に知られてもよい場合は, n 人に挙手してもらうのが手っ取り早いです．しかし, 回答を他人にあまり知られたくない状況があります．質問の具体例として「自分の給料を安いと感じているか」,「最近便秘気味であるか」,「恋愛で片思いしているか」等があります．普通の人にとっては挙手しずらい質問です．このような場合どのようにアンケートすれば良いでしょうか？まず 1 つに, 各人に質問用紙を配布し, 個別に集計する方法があります．もちろんこの方法でも良いのですが, 他に良い方法はないでしょうか？次の有名なアルゴリズムが有効です．

ステップ 1. ハンカチ 1 枚を用意し, n 枚の同一コインを回答者に 1 枚づつ配る．
ステップ 2. n 人に対して「最近便秘気味であるか」等の質問を投げかける．
ステップ 3. 回答者は, コインを YES のときは表側にし NO のときは裏側にして, コインの表裏が他人に見えないようにハンカチの下に入れる．
ステップ 4. ハンカチを開け, コインの表裏の枚数を数えて, アンケートを集計する．

この方法だと, 各人の秘密を周囲にばらすことなくアンケート集計できます．上記の手法は子どもだましかもしれません．しかし, 電子投票に関係する暗号理論の立派な一例です．
友人同士でアルゴリズムを実演すると楽しいです．

3　円周率 π の不思議な計算式

3.1　不思議な計算式の一覧

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4}.$$

グレゴリー・ライプニッツ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}dx$$

が成立するので, 円周率 π は $\frac{22}{7}$ より小さい.

$$\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$$

が成立するので, 円周率 π は約 3.14 である.

BBP(Bailey–Borwein–Plouffe) 公式の 1 種

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3}\right).$$

3.2　証明

定理 1

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4}.$$

証明　$x = \tan\theta$ で置換積分する. $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ であり, x が 0 から 1 へ変化するとき, θ は 0 から $\frac{\pi}{4}$ に変化する. したがって

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

□

定理 2（グレゴリー・ライプニッツ級数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

証明 1　[23] を参考にする. 自然数 n に対して,

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+1} - \{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2}\}$$

とおく.

Step1. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$ を示す.

等比数列の公式より

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2} = \frac{(-1)^n x^{2n}}{x^2+1}.$$

したがって

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right| &\leq \int_0^1 |f_n(x)|\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x^2+1}dx \\
&\leq \int_0^1 x^{2n}dx \\
&= \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ なので, はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$$

が成立する.

Step2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 f_n(x)dx$ を示す.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx - \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (-1)^{k-1}x^{2k-2}dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{2k-2}dx \quad \because \text{定理 1 より} \\
&= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[\frac{1}{2k-1}x^{2k-1}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}
\end{aligned}$$

したがって,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 f_n(x)dx$$

が成立する. 上式で $n \to \infty$ とすれば, Step1 の結果より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

が示される. □

証明 2 [23] を参考にする. 0 以上の整数 n に対して,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}\theta d\theta$$

とおく.

Step1. $I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - I_n$ を示す.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2(n+1)}\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) \tan^{2n}\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta} \tan^{2n}\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}\theta d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2n+1}\tan^{2n+1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n \\
&= \frac{1}{2n+1} - I_n
\end{aligned}$$

よって

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - I_n$$

が示された.

Step2. $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を示す.

I_n の積分の中身は正なので、常に $I_n > 0$ となる. Step1 の結果と合わせると

$$0 < I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - I_n < \frac{1}{2n+1}.$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}$ なので, はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ が成立する.

Step3. $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = (-1)^{n-1} I_n + \frac{\pi}{4}$ を示す.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(I_{k-1} + I_k) \quad \because \text{Step1 の結果より} \\
&= (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - (I_3 + I_4) + \cdots + (-1)^{n-1}(I_{n-1} + I_n) \\
&= I_0 + (-1)^{n-1} I_n \\
&= \frac{\pi}{4} + (-1)^{n-1} I_n
\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = (-1)^{n-1} I_n + \frac{\pi}{4}$$

が成立する. 上式で $n \to \infty$ とすると, Step2 の結果より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

が成立する. □

定理 3

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} dx$$

が成立するので, 円周率 π は $\frac{22}{7}$ より小さい.

証明 [7] の Example 10.12 を参考にする.

$$\frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} = \frac{x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4}{x^2+1}$$

多項式 $x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$ を x^2+1 で割ると商は $x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4$ で余りは -4 となる. したがって

$$\frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - 4\frac{1}{x^2+1}.$$

上式を 0 から 1 までの範囲で積分すると

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} dx &= \int_0^1 x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - 4\frac{1}{x^2+1} dx \\
&= \int_0^1 x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4dx - 4\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \\
&= \left[\frac{1}{7}x^7 - 4\frac{1}{6}x^6 + x^5 - 4\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_0^1 - \pi \quad \because \text{定理 1 より} \\
&= \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi \\
&= \frac{22}{7} - \pi.
\end{aligned}$$

したがって

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} dx$$

が成立する. 上式の積分の中身は正なので, $\pi < \frac{22}{7}$ が成立する. □

定理 4

$$\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$$

が成立するので, 円周率 π は約 3.14 である.

証明　[7] の Exercise 10.38 を参考にする．まず最初に $\int_0^1 x^4(1-x)^4dx = \frac{1}{630}$ を示す．$x^4(1-x)^4$ を展開すると

$$x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$$

になる．この式を 0 から 1 までの範囲で積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^4(1-x)^4dx &= \int_0^1 x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4dx \\ &= \left[\frac{1}{9}x^9 - 4\frac{1}{8}x^8 + 6\frac{1}{7}x^7 - 4\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{6}{7} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{630}(70 - 315 + 540 - 420 + 126) \\ &= \frac{1}{630}\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4dx = \frac{1}{630}$$

が成立する．次に $0 < x < 1$ のとき

$$\frac{x^4(1-x)^4}{2} < \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} < x^4(1-x)^4.$$

この式を 0 から 1 までの範囲で積分すると

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{2}dx < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}dx < \int_0^1 x^4(1-x)^4dx.$$

したがって

$$\frac{1}{1260} < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}dx < \frac{1}{630}$$

が成立する．この式に定理 3 を適用すると

$$\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630}.$$

つまり

$$\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$$

が成立する．上式を数値計算すると

$$3.14126... < \pi < 3.14206...$$

なので円周率 π は約 3.14 である．　□

定理 5（BBP(Bailey–Borwein–Plouffe) 公式の 1 種）

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3}\right).$$

[20] の 20 ページ及び [2] の 854 ページを参考にする. 事前準備として、次の補題 1 を証明する.

補題 1　$k = 1, 2, 3$ に対して,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{k-1}}{1+x^4} dx = \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+k)}.$$

証明

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^4\right)^n dx \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+k-1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-1)^n x^{4n+k-1} dx \quad \because \text{項別積分より} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{4n+k-1} dx
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{4n+k-1} dx &= \left[\frac{1}{4n+k} x^{4n+k}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{4n+k} \frac{1}{4^n}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}^k} \frac{1}{4n+k} \frac{1}{4^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+k)} \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

以上より補題 1 が証明された. □

事前準備ができたので, 定理 5 を証明する.

定理 5 の証明

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\frac{1}{4n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\frac{1}{4n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\frac{1}{4n+3} \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+x^4}dx + 2\cdot 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x}{1+x^4}dx + 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^2}{1+x^4}dx \quad \because \text{補題 1 より} \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1+x^4}dx \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{1}\frac{1+y+\frac{1}{2}y^2}{1+\frac{1}{4}y^4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}dy\right) \quad \because y=\sqrt{2}x \text{ の置換積分より} \\
&= 4\int_0^1\frac{y^2+2y+2}{y^4+4}dy \\
&= 4\int_0^1\frac{1}{y^2-2y+2}dy \quad \because y^4+4=(y^2+2y+2)(y^2-2y+2) \text{ より} \\
&= 4\int_0^1\frac{1}{(y-1)^2+1}dy \\
&= 4\int_1^0\frac{1}{u^2+1}(-1du) \quad \because u=1-y \text{ の置換積分より} \\
&= 4\int_0^1\frac{1}{u^2+1}du \\
&= \pi \quad \because \text{定理 1 より} \\
&= (\text{左辺}).
\end{aligned}
$$

以上より定理 5 が証明された. □

参考文献

[1]D. Acheson. *The Wonder Book of Geometry: A Mathematical Story*. Oxford University Press, 2020.

[2]Victor Adamchik and Stan Wagon. “A simple formula for π”. In: *The American mathematical monthly* 104.9 (1997), pp. 852–855.

[3]D. Brill. *Brilliant Origami: A Collection of Original Designs*. Japan Publications, 1996.

[4]M. Chamberland. *Single Digits: In Praise of Small Numbers*. Princeton University Press, 2017.

[5]John Cunliffe. *The Silver Rectangle - BOS Booklet 21*. British Origami Society - BOS, 1983.

[6]K. Kasahara. *Amazing Origami*. Sterling Pub., 2002.

[7]P.R. Mercer. *More Calculus of a Single Variable*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2014.

[8]R.B. Nelsen. *Proofs without Words II*. Classroom Resource Materials. Mathematical Association of America, 2000.

[9]R.B. Nelsen. *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*. Classroom Resource Materials. Mathematical Association of America, 2015.

[10]A.S. Posamentier and R. Geretschläger. *The Circle: A Mathematical Exploration beyond the Line*. Prometheus Books, 2016.

[11]N. Robinson. *The Origami Bible: A Practical Guide to the Art of Paper Folding*. North Light Books, 2004.

[12]N. Robinson. *World's Best Origami: Over 100 Amazing Models from Top Origami Artists*. Dorling Kindersley Limited, 2010.

[13]Nick Robinson. *A4 rhombic Unit*. 2018. URL: `https://nickorigami.com/wp-content/uploads/2018/02/diag_a4unit.gif` (visited on 05/30/2023).

[14]H. Walser. *99 Points of Intersection: Examples-Pictures-Proofs*. Mathematical Association of America, 2006.

[15]Hans Walser. *Das DIN Rechteck*. 2005. URL: `https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/DIN_Rechteck/DIN_Rechteck.pdf` (visited on 05/18/2023).

[16]Hans Walser. *Kantenmodell des Würfels und des Tetraeders*. 2012. URL: `https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kantenmodell_Wuerfel/Kantenmodell_Wuerfel.htm` (visited on 05/18/2023).

[17]D.G. Wells. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Penguin book. Penguin Books, 1991.

[18]前川淳. **本格折り紙** *[√ 2]*. 日貿出版社, 2009.

[19]加藤渾一. **折り紙でひらめく補助線の幾何**. 2006. URL: `http://izumi-math.jp/K_Katou/hojyogeo/hojyogeo.pdf` (visited on 05/18/2023).

[20]松本圭司. **円周率 π について**. 2011. URL: `https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matsu/pdf/syoutai.pdf` (visited on 05/18/2023).

[21]笠原邦彦. **おりがみ新世紀 : 名人達の傑作集**. ビバ!おりがみシリーズ 3. サンリオ, 1989.

[22]藤原大樹. **定規とコンパスによる作図**. 2020. URL: `https://kyoto-academeia.sakura.ne.jp/blog/?p=9889` (visited on 05/18/2023).

[23]難波博之. **グレゴリー・ライプニッツ級数の２通りの証明**. 2021. URL: `https://manabitimes.jp/math/775` (visited on 05/18/2023).