ネイピア数eの無理数性

2024 年 3 月 19 日(火)

概要

ネイピア数eが無理数であることを 2 通りの方法で証明します.

証明 1

文献[1] 及び文献[2] の 109 ページを参考にする. ネイピア数eが有理数$\frac{p}{q}$と仮定して矛盾を導く. ここでp, qはともに自然数である. まず各整数$n \geq 0$に対して,

$$I_n = \frac{q}{n!} \int_0^1 x^n (1-x)^n e^x \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

と定める.

(a) $I_0 = p - q$及び$I_1 = -p + 3q$を証明する.

$$\begin{aligned} I_0 &= q \int_0^1 1 \cdot e^x \, \mathrm{d}x = q[e^x]_0^1 = q(e-1) = qe - q \\ &= p - q \quad \because e = \frac{p}{q} \text{より} \end{aligned} \tag{2}$$

$$I_1 = q \int_0^1 x(1-x)e^x \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{q} &= \int_0^1 x(1-x)e^x \, \mathrm{d}x \\ &= [x(1-x)e^x]_0^1 - \int_0^1 (-2x+1)e^x \, \mathrm{d}x \quad \because \text{部分積分より} \\ &= \int_0^1 (2x-1)e^x \, \mathrm{d}x \\ &= [(2x-1)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x \, \mathrm{d}x \quad \because \text{部分積分より} \\ &= e + 1 - 2(e-1) \\ &= -e + 3 \end{aligned} \tag{4}$$

よって

$$I_1 = -qe + 3q = -p + 3q \quad \because e = \frac{p}{q} \text{より} \tag{5}$$

となる.

(b) $n \geq 2$のとき, 漸化式 $I_n = (-4n+2)I_{n-1} + I_{n-2}$を証明する.
各整数$n \geq 0$に対して,

$$f_n(x) = \frac{q}{n!}x^n(1-x)^n \tag{6}$$

と定める. $n \geq 2$のとき

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 f_n(x)e^x \,\mathrm{d}x \\
&= [f_n(x)e^x]_0^1 - \int_0^1 {f_n}'(x)e^x \,\mathrm{d}x \quad \because \text{部分積分より} \\
&= -\int_0^1 {f_n}'(x)e^x \,\mathrm{d}x \\
&= -\left\{ [{f_n}'(x)e^x]_0^1 - \int_0^1 {f_n}''(x)e^x \,\mathrm{d}x \right\} \quad \because \text{部分積分より}
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで

$$\begin{aligned}
{f_n}'(x) &= \left(\frac{q}{n!}(x(1-x))^n \right)' \\
&= \frac{q}{n!}n(x(1-x))^{n-1}(-2x+1) \\
&= \frac{q}{(n-1)!}(x(1-x))^{n-1}(-2x+1)
\end{aligned} \tag{8}$$

である. 式(7)に${f_n}'(0) = {f_n}'(1) = 0$を代入すると

$$I_n = \int_0^1 {f_n}''(x)e^x \,\mathrm{d}x \tag{9}$$

となる. そして

$${f_n}''(x) = \frac{q}{(n-1)!}\left\{(n-1)(x(1-x))^{n-2}(-2x+1)^2 + (x(1-x))^{n-1}(-2)\right\} \tag{10}$$

ここで$(-2x+1)^2 = -4x(1-x)+1$をこの式(10)に代入すると

$$\begin{aligned}
{f_n}''(x) &= \frac{q}{(n-1)!}\left\{-4(n-1)(x(1-x))^{n-1} + (n-1)(x(1-x))^{n-2} - 2(x(1-x))^{n-1}\right\} \\
&= \frac{q}{(n-1)!}\left\{(-4n+2)(x(1-x))^{n-1} + (n-1)(x(1-x))^{n-2}\right\} \\
&= (-4n+2)\frac{q}{(n-1)!}(x(1-x))^{n-1} + \frac{q}{(n-2)!}(x(1-x))^{n-2} \\
&= (-4n+2)f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x) \quad \because f_n(x)\text{の定義より}
\end{aligned} \tag{11}$$

が成立する. この式(11)を式(9)に代入すると

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \{(-4n+2)f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)\}e^x \,\mathrm{d}x \\
&= (-4n+2)\int_0^1 f_{n-1}(x)e^x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_{n-2}(x)e^x \,\mathrm{d}x \\
&= (-4n+2)I_{n-1} + I_{n-2} \quad \because I_n\text{の定義より}
\end{aligned} \tag{12}
$$

が得られる.

(c) 各整数$n \geq 0$に対してI_nは整数であることを証明する.
(a)の結果よりI_0, I_1はともに整数であり, (b)の漸化式に数学的帰納法を適用するとI_nは整数となる.

(d) 十分大きなnに対して, I_nは0より大きく1より小さいことを証明する.
$0 \leq x \leq 1$のとき

$$
1 \leq e^x \leq e \text{ かつ } 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4} \tag{13}
$$

なので

$$
I_n < \frac{q}{n!}\int_0^1 \left(\frac{1}{4}\right)^n e \,\mathrm{d}x = \frac{qe}{n!4^n} \tag{14}
$$

したがって, 各整数$n \geq 0$に対して

$$
0 < I_n < \frac{qe}{n!4^n} \tag{15}
$$

が成立する.いまここでqeはnに依存しない定数なので

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{qe}{n!4^n} = 0 \tag{16}
$$

である. はさみうちの原理を式(15)に適用すると, 十分大きなnに対して, I_nは0より大きく1より小さい.

(e) (c)と(d)の結果が矛盾するため, ネイピア数eは無理数である. 証明終了.

証明 2

大阪大学の 1997 年理系後期日程の入試問題を参考にする. まず各自然数nに対して,

$$
a_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} \,\mathrm{d}x \tag{17}
$$

と定める.

(a) $a_1 = e - 2$を証明する.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^1 xe^{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x(-e^{1-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot(-e^{1-x})\,\mathrm{d}x \quad \because \textbf{部分積分より} \\
&= -1 + \int_0^1 e^{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -1 + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 \\
&= -1 - (1-e) \\
&= e - 2
\end{aligned} \tag{18}
$$

(b) $n \geq 2$のとき, 漸化式 $a_n = na_{n-1} - 1$ を証明する.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n e^{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x^n(-e^{1-x})\right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}(-e^{1-x})\,\mathrm{d}x \quad \because \textbf{部分積分より} \\
&= -1 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -1 + na_{n-1} \quad \because a_n\textbf{の定義より}
\end{aligned} \tag{19}
$$

(c) 各自然数nに対して,

$$
\frac{a_n}{n!} = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) \tag{20}
$$

が成立することを証明する.
数学的帰納法によって示す. $n = 1$のとき

$$
\begin{aligned}
(\textbf{左辺}) &= \frac{a_1}{1!} = e - 2 \quad \because (\mathrm{a})\textbf{の結果より} \\
(\textbf{右辺}) &= e - \left(1 + \frac{1}{1!}\right) = e - 2
\end{aligned} \tag{21}
$$

よって$n = 1$のとき成立する. 次に$n = k(\geq 1)$のとき等式が成立すると仮定する. つまり

$$
\frac{a_k}{k!} = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}\right) \tag{22}
$$

を仮定する. すると

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{(k+1)!} &= \frac{(k+1)a_k - 1}{(k+1)!} \quad \because \text{(b)の結果より} \\
&= \frac{a_k}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\
&= e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) - \frac{1}{(k+1)!} \quad \because \text{帰納法の仮定である式(22)より} \\
&= e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}\right)
\end{aligned} \tag{23}
$$

よって$n = k+1$のときも成立する. したがって各自然数nに対して, 式(20)が成立する.

(d) 各自然数nに対して, $0 < a_n < 1$を証明する.
$0 \leq x \leq 1$に対して, $f_n(x) = x^n e^{1-x}$とおく. すると

$$
\begin{aligned}
{f_n}'(x) &= nx^{n-1}e^{1-x} + x^n e^{1-x}(-1) \\
&= x^{n-1}e^{1-x}(n-x)
\end{aligned} \tag{24}
$$

が得られる. ${f_n}'(x) \geq 0$となり, $f_n(x)$は単調増加である. したがって$f_n(0) \leq f_n(x) \leq f_n(1)$
つまり $0 \leq f_n(x) \leq 1$が成立する. この不等式$0 \leq f_n(x) \leq 1$を0から1の区間で積分すると

$$
\int_0^1 0 \,\mathrm{d}x < \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x < \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x \tag{25}
$$

となり, $0 < a_n < 1$が得られる.

(e) 各自然数nに対して, $n!e$は整数にならないことを証明する.
(c)の結果より

$$
n!e = a_n + n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \tag{26}
$$

が成立する.

$$
n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \tag{27}
$$

の部分は整数であり, (d)の結果$0 < a_n < 1$を考慮すると, $n!e$は整数ではない.

(f) ネイピア数eが無理数であることを証明する.
ネイピア数eが有理数だと仮定する. すると十分大きな自然数nに対して$n!e$は整数となる.
ところがこれは(e)の結果に矛盾する. よってネイピア数eは有理数ではない. 証明終了.

参考文献

[1] L. Zhou and L. Markov, “Recurrent proofs of the irrationality of certain trigonometric values,” The American Mathematical Monthly, vol. 117, no. 4, pp. 360–362, 2010.

[2] W. Stein, Elementary Number Theory: Primes, Congruences, and Secrets: A Computational Approach. in Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2009.