円周率πの無理数性

2024 年 3 月 19 日(火)

概要

円周率πが無理数であることを証明します.

証明

文献[1] の Theorem 2 及び文献[2] の 260 ページを参考にする. 円周率πが有理数$\frac{p}{q}$と仮定して矛盾を導く. ここでp, qはともに自然数である. まず各整数$n \geq 0$に対して,

$$I_n = \frac{q^n}{n!} \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin x \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

と定める.

(a) $I_0 = 2$及び$I_1 = 4q$を証明する.

$$I_0 = \int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = (-1)(-1-1) = 2 \tag{2}$$

$$I_1 = q \int_0^\pi x(\pi - x) \sin x \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_1}{q} &= \int_0^\pi x(\pi - x) \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= [x(\pi - x)(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-2x + \pi)(-\cos x) \, \mathrm{d}x \quad \because \textbf{部分積分より} \\
&= \int_0^\pi (-2x + \pi) \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= [(-2x + \pi) \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi (-2) \sin x \, \mathrm{d}x \quad \because \textbf{部分積分より} \\
&= 2 \int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot 2 \quad \because \textbf{式}(2)\textbf{より} \\
&= 4
\end{aligned} \tag{4}$$

よって$I_1 = 4q$となる.

(b) $n \geq 2$のとき, 漸化式 $I_n = (4n-2)qI_{n-1} - p^2 I_{n-2}$を証明する.
各整数$n \geq 0$に対して,

$$f_n(x) = \frac{q^n}{n!} x^n (\pi - x)^n \tag{5}$$

と定める. $n \geq 2$のとき

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi f_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \left[f_n(x)(-\cos x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi {f_n}'(x)(-\cos x)\,\mathrm{d}x \quad \because \textbf{部分積分より} \\
&= \int_0^\pi {f_n}'(x)\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \left[{f_n}'(x)\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi {f_n}''(x)\sin x\,\mathrm{d}x \quad \because \textbf{部分積分より} \\
&= -\int_0^\pi {f_n}''(x)\sin x\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{6}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
{f_n}'(x) &= \left(\frac{q^n}{n!}(x(\pi-x))^n\right)' \\
&= \frac{q^n}{n!}n(x(\pi-x))^{n-1}(-2x+\pi) \\
&= \frac{q^n}{(n-1)!}(x(\pi-x))^{n-1}(-2x+\pi)
\end{aligned} \tag{7}
$$

さらに

$$
{f_n}''(x) = \frac{q^n}{(n-1)!}\left\{(n-1)(x(\pi-x))^{n-2}(-2x+\pi)^2 + (x(\pi-x))^{n-1}(-2)\right\} \tag{8}
$$

ここで$(-2x+\pi)^2 = -4x(\pi-x)+\pi^2$をこの式(8)に代入すると,

$$
\begin{aligned}
{f_n}''(x) &= \frac{q^n}{(n-1)!}\left\{-4(n-1)(x(\pi-x))^{n-1} + (n-1)\pi^2(x(\pi-x))^{n-2} - 2(x(\pi-x))^{n-1}\right\} \\
&= \frac{q^n}{(n-1)!}\left\{(-4n+2)(x(\pi-x))^{n-1} + (n-1)\pi^2(x(\pi-x))^{n-2}\right\} \\
&= (-4n+2)q\frac{q^{n-1}}{(n-1)!}(x(\pi-x))^{n-1} + \pi^2 q^2\frac{q^{n-2}}{(n-2)!}(x(\pi-x))^{n-2} \\
&= -(4n-2)qf_{n-1}(x) + (\pi q)^2 f_{n-2}(x) \quad \because f_n(x)\textbf{の定義より} \\
&= -(4n-2)qf_{n-1}(x) + p^2 f_{n-2}(x) \quad \because \pi = \frac{p}{q}\textbf{より}
\end{aligned} \tag{9}
$$

この式(9)を式(6)に代入すると,

$$
\begin{aligned}
I_n &= -\int_0^\pi \left\{-(4n-2)qf_{n-1}(x) + p^2 f_{n-2}(x)\right\}\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= (4n-2)q\int_0^\pi f_{n-1}(x)\sin x\,\mathrm{d}x - p^2\int_0^\pi f_{n-2}(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= (4n-2)qI_{n-1} - p^2 I_{n-2} \quad \because I_n\textbf{の定義より}
\end{aligned} \tag{10}
$$

が得られる.

(c) 各整数$n \geq 0$に対してI_nは整数であることを証明する.
(a)の結果よりI_0, I_1はともに整数であり, (b)の漸化式に数学的帰納法を適用するとI_nは整数となる.

(d) 十分大きなnに対して, I_nは0より大きく1より小さいことを証明する.
$0 \leq x \leq \pi$のとき

$$0 \leq \sin x \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq x(\pi - x) \leq \frac{\pi^2}{4} \tag{11}$$

なので

$$I_n < \frac{q^n}{n!} \int_0^\pi \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \cdot 1 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{\left(q\pi^2/4\right)^n}{n!} \tag{12}$$

したがって, 各整数$n \geq 0$に対して

$$0 < I_n < \pi \frac{\left(q\pi^2/4\right)^n}{n!} \tag{13}$$

が成立する. いまここで$q\pi^2/4$はnに依存しない定数なので

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(q\pi^2/4\right)^n}{n!} = 0 \tag{14}$$

である. はさみうちの原理を式(13)に適用すると, 十分大きなnに対してI_nは0より大きく1より小さい.

(e) (c)と(d)の結果が矛盾するため, 円周率πは無理数である. 証明終了.

参考文献

[1] L. Zhou and L. Markov, “Recurrent proofs of the irrationality of certain trigonometric values,” The American Mathematical Monthly, vol. 117, no. 4, pp. 360–362, 2010.

[2] S. Stewart, How to Integrate It: A Practical Guide to Finding Elementary Integrals. Cambridge University Press, 2017.