ピタゴラスの定理

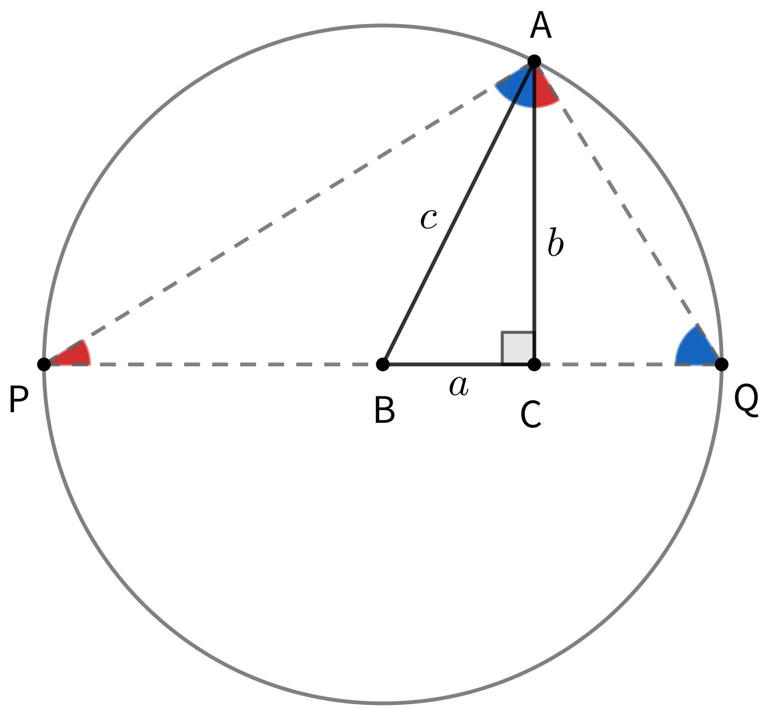
2025 年 1 月 18 日(土)

はじめに

ピタゴラスの定理(三平方の定理)の面白い証明を見つけたのでメモしておきます.

証明 1

(Posamentier, 2010) の 60 ページ, (Nelsen, 1993) の 8 ページ及び(Hardy, 1986) を参考にする.



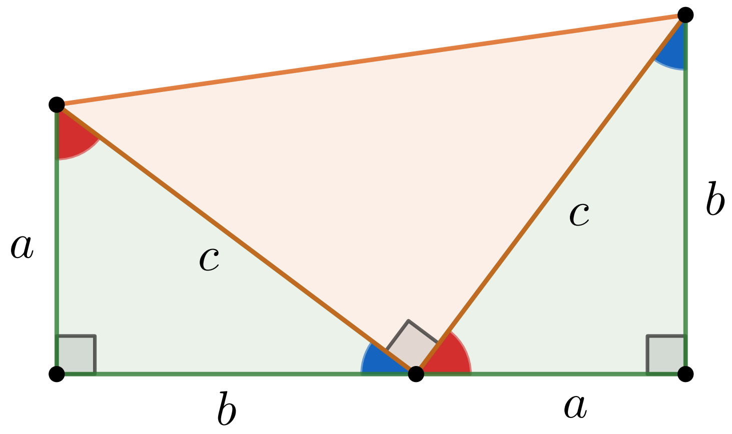
直角三角形ABCがあるとき, 点Bを中心として半径cの円を描く. このとき三角形ACQと三角形PCAは相似なので

$$\frac{c-a}{b} = \frac{b}{c+a}$$

となる. つまり$a^2 + b^2 = c^2$が成立する. 証明終了.

証明 2

(Alsina & Nelsen, 2020) の 128 ページ及び(Nelsen, 1993) の 7 ページを参考にする.



図形全体の面積をSとする. 全体を 1 つの台形だと見なせば

$$S = \frac{1}{2}(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高さ}$$
$$= \frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}(a+b)^2$$

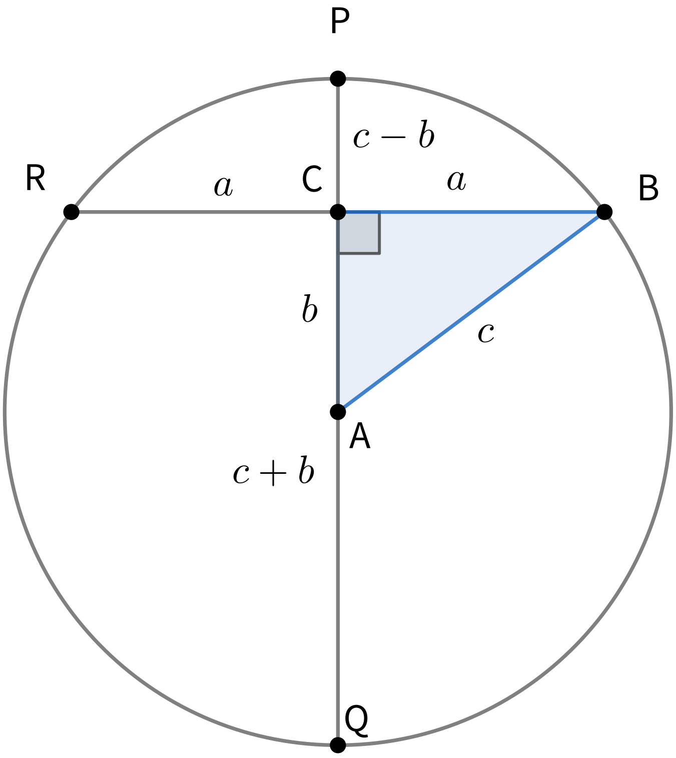
全体を 3 つの直角三角形と見なせば

$$S = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}ab = ab + \frac{1}{2}c^2$$

以上より $\frac{1}{2}(a+b)^2 = ab + \frac{1}{2}c^2$を整理すると$a^2 + b^2 = c^2$が得られる. 証明終了.

証明 3

(Posamentier & Hauptman, 2006) の 108 ページを参考にする.



直角三角形 ABC があるとき, 点 A を中心として半径cの円を描く. すると円内部で弦 RB と弦 PQ が点 C で交わる. これに方べきの定理を用いると, $\overline{\mathrm{RC}} \times \overline{\mathrm{CB}} = \overline{\mathrm{PC}} \times \overline{\mathrm{CQ}}$, つまり$a \cdot a = (c-b)(c+b)$が成立する. よって$a^2 + b^2 = c^2$となり, 証明が終了する.

証明 4

(Posamentier & Hauptman, 2006) の 109 ページを参考にする. 折紙的な発想を用います.

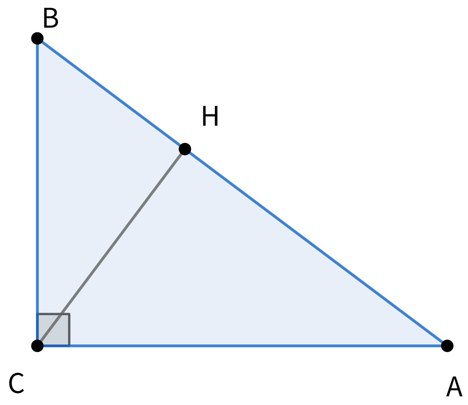


Figure 1: 直角三角形 ABC

直角三角形 ABC があるとき, 点 C から辺 AB に下した垂線の足を H とします(Figure 1). この三角形 ABC が 3 枚の△BCH, △CAH, △ABC に折りたたまれて構成されていると見做します.

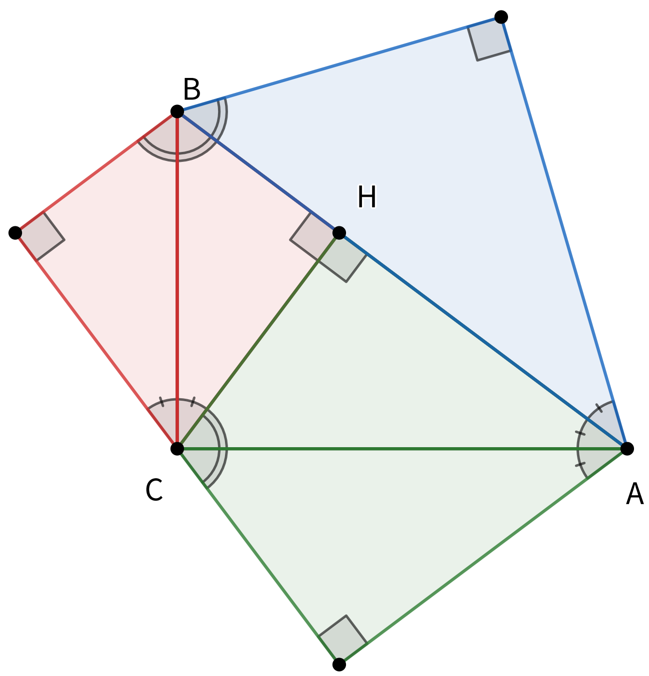


Figure 2: 3 つの三角形を展開

この 3 枚の三角形を展開します(Figure 2).

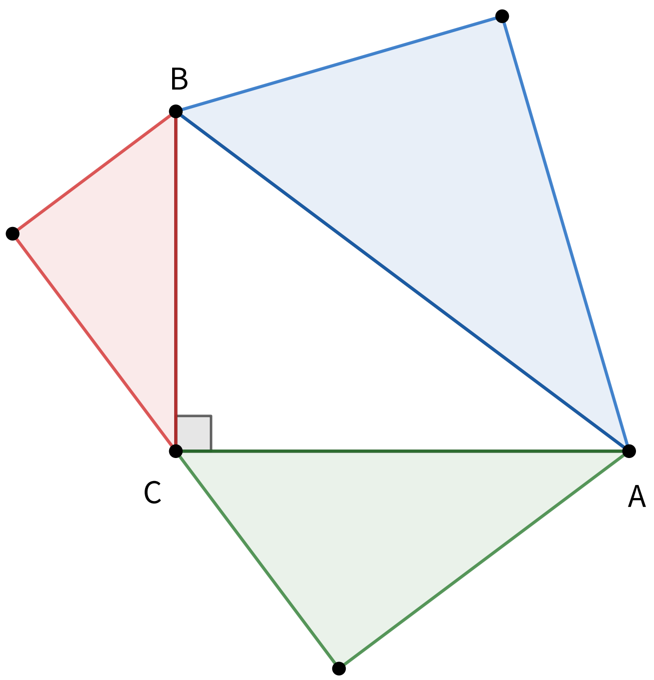


Figure 3: 面積(青三角形) = 面積(赤三角形) + 面積(緑三角形)

折り畳まれていたものを展開しただけなので, 青三角形の面積は赤三角形の面積と緑三角形の面積の合計に等しくなります(Figure 3).

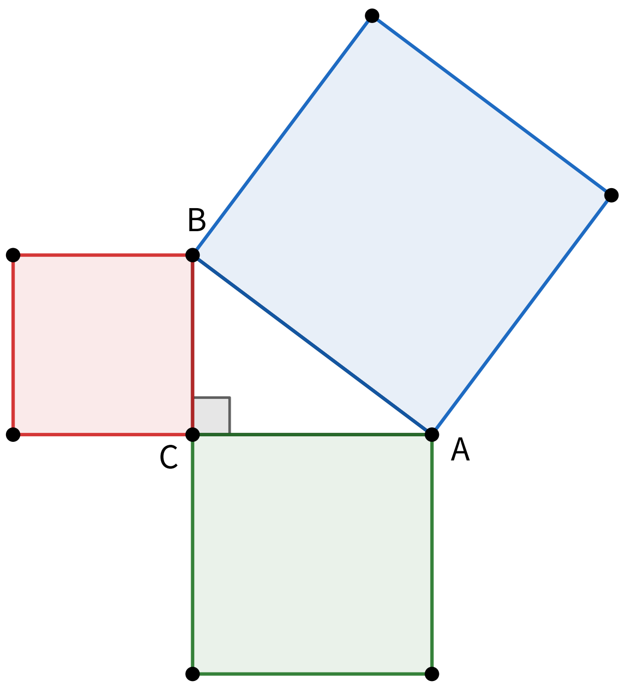


Figure 4: 三角形を正方形に置き換える

次に青赤緑の三角形を正方形に置き換えます(Figure 4). 青赤緑の三角形はすべて相似なので、各正方形の面積は各三角形の面積の同じ定数倍となります. したがって青正方形の面積は赤正方形の面積と緑正方形の面積の合計に等しいです. これで定理が証明されました.

参考文献

Alsina, C., & Nelsen, R. (2020). A Cornucopia of Quadrilaterals. American Mathematical Society.

Hardy, M. (1986). Behold! The Pythagorean Theorem via Mean Proportions. The College Mathematics Journal, 17(5), 422.

Nelsen, R. (1993). Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking. Mathematical Association of America.

Posamentier, A. (2010). The Pythagorean Theorem: The Story of Its Power and Beauty. Prometheus Books.

Posamentier, A., & Hauptman, H. (2006). 101+ Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics: A Resource for Secondary School Teachers. SAGE Publications.