ヘロンの公式

2025 年 1 月 18 日(土)

はじめに

3 辺の長さから三角形の面積を求める公式として、次のヘロンの公式が知られています.

ヘロンの公式

三角形の 3 辺の長さをa, b, cとするとき, その三角形の面積Kは

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

となる. ここでsは$s = (a+b+c)/2$を表す.

このヘロンの公式を 2 通りの方法で証明します. 証明 1 はピタゴラスの定理を用いており, 高校の授業で普通に習う内容です. 他方で, 証明 2 は三角形の内接円を用いており, 意外と知られていません.

証明 1

(Leonard et al., 2014) の定理 5.3.6 を参考にする.

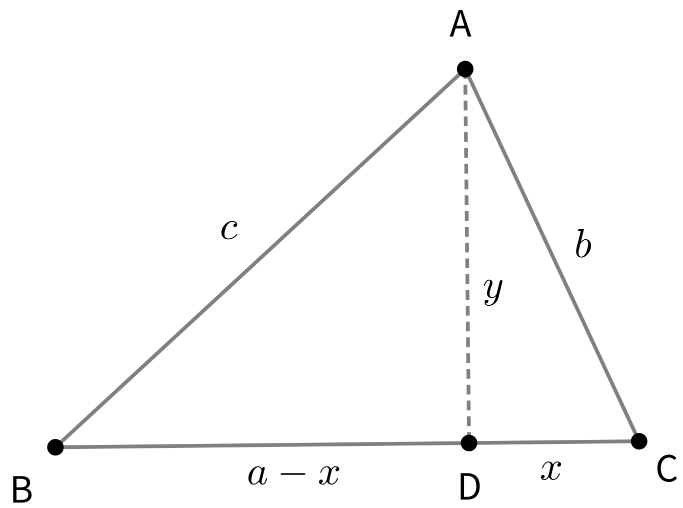

Figure 1: 3 角形 ABC

一般性を失わず, 辺 BC を△ABC で最も長い辺とする. 点 A から辺 BC に降ろした垂線の足を D と呼ぶ. そして, 辺 CD, AD の長さをそれぞれx, yとおく. このとき, △ADC 及び△ABD にピタゴラスの定理を適用すると,

$$x^2 + y^2 = b^2 \quad (1)$$

$$(a-x)^2 + y^2 = c^2$$

がそれぞれ得られる. この 2 式を引算すると

$$2ax - a^2 = b^2 - c^2$$

つまり

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \quad (2)$$

が得られる. そうすると△ABC の面積Kは以下の様に変形できる.

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}ay \\
&= \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - x^2} \qquad \because \text{式}(1)\text{より} \\
&= \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right]^2} \qquad \because \text{式}(2)\text{より} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2s)2(s-c)2(s-b)2(s-a)} \qquad \because s = \frac{a+b+c}{2}\text{より} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}$$

となり証明終了. □

証明 2

(Alsina & Nelsen, 2010) の 5.5 節を参考にする.

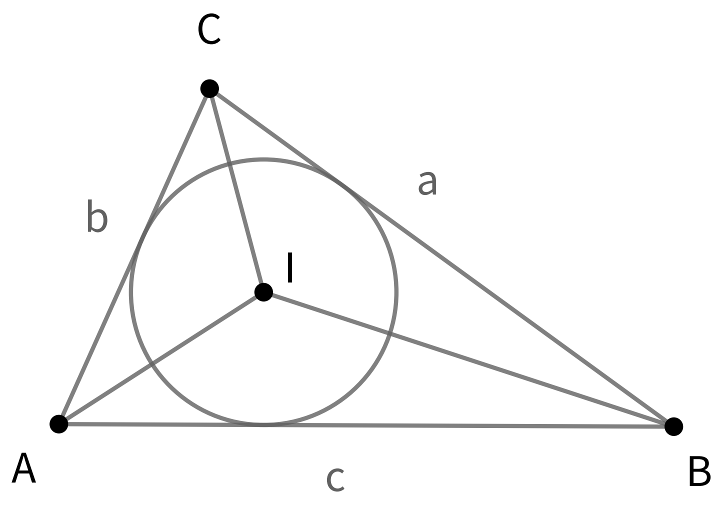

Figure 2: 内心と内接円

3 角形 ABC があるとき, 3 つの角をそれぞれ 2 等分して, 内心 I 及び内接円を描く(Figure 2).

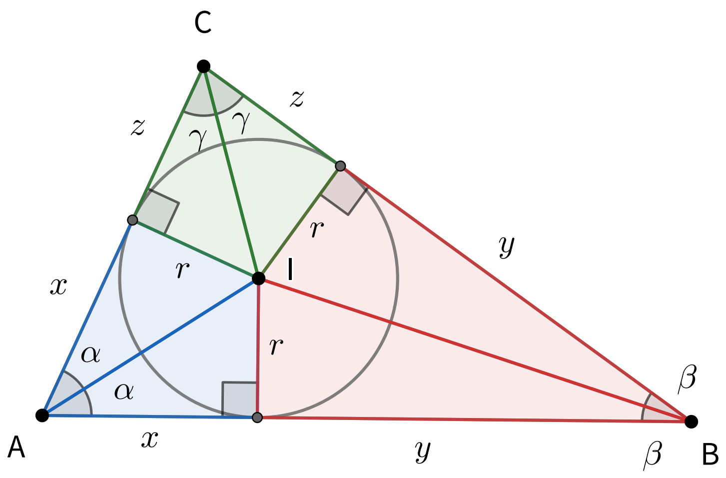

Figure 3: 分割

このとき△ABC は, 角の 2 等分線及び 3 つの内接円半径により, 合同な 3 組の直角 3 角形に分割される(Figure 3). そして$a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$とおく. このとき$s = x + y + z$である. そして,

$$x = s - a, \ \ y = s - b, \ \ z = s - c \ (3)$$

が成立する. 次に内接円の半径をrとおく. さらに角度を$\alpha = A/2$, $\beta = B/2$, $\gamma = C/2$とおく.

補題 1 $K = r(x + y + z) = rs.$
証明は次の Figure 4 を見て, 面積を比較して下さい. □

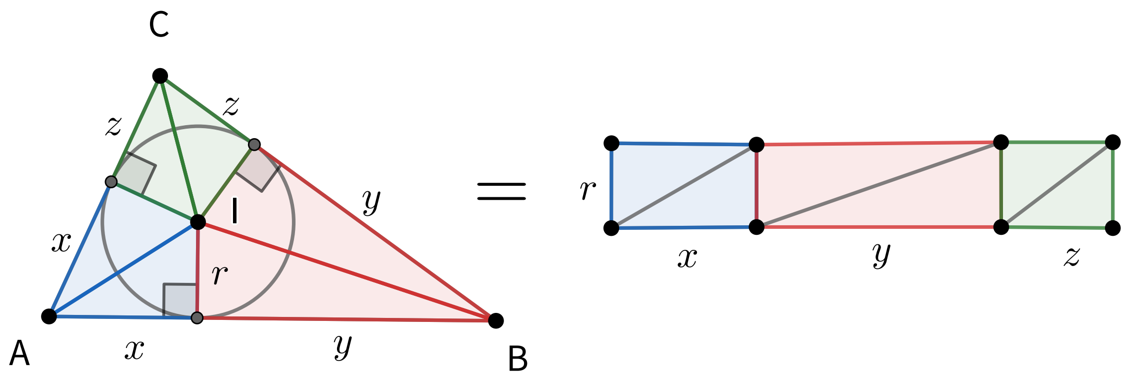

Figure 4: 補題 1 の証明

補題 2 $xyz = r^2(x + y + z) = r^2 s.$
証明は次の Figure 5 を見て下さい. wは$\sqrt{r^2 + x^2}$を表すとします.

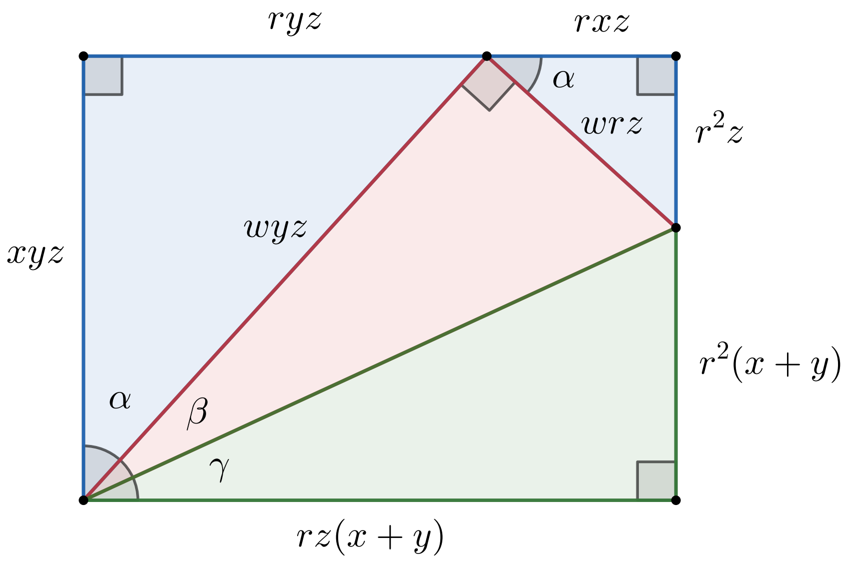

Figure 5: 補題 2 の証明

長方形の左側と右側の高さが等しいので, 補題 2 が成立します. □

以上より

$$
\begin{aligned}
K^2 &= (rs)^2 & \because \text{補題 1 より} \\
&= sxyz & \because \text{補題 2 より} \\
&= s(s-a)(s-b)(s-c) & \because \text{式(3)より}
\end{aligned}
$$

となり証明終了. □

今後の課題

論文(Zheng, 2024) 及びその参考文献を調査したい. 面白そうな論文が目白押しだが, 高すぎて購入できない. どうすれば良いでしょうか? いいアイデアをお持ちの方は教えて下さい.

参考文献

Alsina, C., & Nelsen, R. (2010). Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics. Mathematical Association of America.

Leonard, I., Lewis, J., Liu, A., & Tokarsky, G. (2014). Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective. Wiley.

Zheng, S. (2024). Another Simple Proof of Heron's Formula. Mathematics Magazine, 97(2), 165–166.