ネイピア数eの数値計算

2025 年 4 月 20 日(日)

はじめに

ネイピア数$e = 2.71828...$を 2 通りの方法で数値計算しました. 必要な予備知識は高校数学だけです.

方法 A

(亀谷俊司, 2004) の 160 ページを参考にする.
定理 任意の自然数nに対して

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \leq e \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!} \tag{1}$$

が成立する.
[証明] $e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$なので左側の不等式は明らか. 右側の不等式を示す. まず

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} \tag{2}$$

が成立する. ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} &= \frac{1}{n!}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+j)}\right) \\
&\leq \frac{1}{n!}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^j\right) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^j \\
&= \frac{1}{n!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \quad \because \text{等比級数の公式より} \\
&= \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

となる. 上式(3)を式(2)に代入すると

$$e \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{n \cdot n!} \tag{4}$$

が成立する. □

数値計算

数列a_n, b_nを

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\
b_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

で定義する. そして以下の python コードで数値計算を行う.

```
# method_A.py
# calculate the number e
# [0] init
from decimal import *
getcontext().prec = 200
from fractions import Fraction
from math import *
N = 30
digits = 50

# [1] calculate sequences a[n], b[n]
a = {}
a[0] = 1
b = {}
for n in range(1, N+1):
    a[n] = a[n-1] + Fraction(1, factorial(n))
    b[n] = a[n] + Fraction(1, n * factorial(n))

# [2] print result
print("n, a[n], b[n]")
decimal_from_frac = lambda x: Decimal(x.numerator) / Decimal(x.denominator)
for n in range(1, N+1):
    a_n = str(decimal_from_frac(a[n]))[:2 + digits]
    b_n = str(decimal_from_frac(b[n]))[:2 + digits]
    print(f"{n:0>2d}" + ", " + a_n + ", " + b_n)
```

方法 B

(Stein, 2009) の 5.4 節および(Zhou & Markov, 2010) を参考にする.
定理 数列p_n及びq_nを$p_0 = 1, p_1 = 3, q_0 = 1, q_1 = 1$

$$
\begin{aligned}
p_n &= 2(2n-1)p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n \geq 2 \\
q_n &= 2(2n-1)q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

で定める. このとき$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = e$が成立する.
[証明] まず各整数$n \geq 0$に対して,

$$
J_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (x-1)^n e^x \, dx \tag{7}
$$

と定める.

(a) 数列J_nの性質を示す.
(a.1) $J_0 = e - 1$を示す.

$$J_0 = \frac{1}{0!}\int_0^1 1\cdot e^x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = e-1 \tag{8}$$

(a.2) $J_1 = e-3$を示す.

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^1 x(x-1)e^x \,\mathrm{d}x \\
&= [x(x-1)e^x]_0^1 - \int_0^1 (2x-1)e^x \,\mathrm{d}x \quad \because \text{部分積分より} \\
&= -\int_0^1 (2x-1)e^x \,\mathrm{d}x \\
&= -\left\{[(2x-1)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x \,\mathrm{d}x\right\} \quad \because \text{部分積分より} \\
&= -e-1+2\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x \\
&= -e-1+2[e^x]_0^1 \\
&= -e-1+2(e-1) \\
&= e-3
\end{aligned} \tag{9}$$

(a.3) $n \geq 2$のとき, 漸化式$J_n = 2(2n-1)J_{n-1} + J_{n-2}$を示す.
各整数$n \geq 0$に対して

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(x-1)^n \tag{10}$$

と定める. $n \geq 2$のとき

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^1 f_n(x)e^x \,\mathrm{d}x \\
&= [f_n(x)e^x]_0^1 - \int_0^1 {f_n}'(x)e^x \,\mathrm{d}x \quad \because \text{部分積分より} \\
&= -\int_0^1 {f_n}'(x)e^x \,\mathrm{d}x \\
&= -\left\{[{f_n}'(x)]_0^1 - \int_0^1 {f_n}''(x)e^x \,\mathrm{d}x\right\} \quad \because \text{部分積分より}
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで

$$\begin{aligned}
{f_n}'(x) &= \left(\frac{1}{n!}(x(x-1))^n\right)' \\
&= \frac{1}{n!}n(x(x-1))^{n-1}(2x-1) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(x(x-1))^{n-1}(2x-1)
\end{aligned} \tag{12}$$

である. 式(11)に${f_n}'(0) = {f_n}'(1) = 0$を代入すると

$$J_n = \int_0^1 {f_n}''(x) e^x \, \mathrm{d}x \tag{13}$$

となる. そして

$$f_n{}''(x) = \frac{1}{(n-1)!}\{(n-1)(x(x-1))^{n-2}(2x-1)^2 + ((x(x-1))^{n-1} \cdot 2\} \tag{14}$$

ここで$(2x-1)^2 = 4x(x-1)+1$を上式(14)に代入すると

$$\begin{aligned} f_n{}''(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\{4(n-1)(x(x-1))^{n-1} + (n-1)(x(x-1))^{n-2} + 2(x(x-1))^{n-1}\} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\{(4n-2)(x(x-1))^{n-1} + (n-1)(x(x-1))^{n-2}\} \\ &= (4n-2)\frac{1}{(n-1)!}(x(x-1))^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}(x(x-1))^{n-2} \\ &= (4n-2)f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x) \quad \because f_n(x)\text{の定義より} \end{aligned} \tag{15}$$

が成立する. この式(15)を式(13)に代入すると

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 \{(4n-2)f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)\} e^x \, \mathrm{d}x \\ &= (4n-2)\int_0^1 f_{n-1}(x) e^x \, \mathrm{d}x + \int_0^1 f_{n-2}(x) e^x \, \mathrm{d}x \\ &= (4n-2)J_{n-1} + J_{n-2} \quad \because \text{数列}J_n\text{の定義より} \end{aligned} \tag{16}$$

が得られる.
(a.4) $\lim_{n\to\infty} J_n = 0$を示す.

$$\begin{aligned} |J_n| &\le \frac{1}{n!}\int_0^1 |x^n(1-x)^n e^x| \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(1-x)^n e^x \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{17}$$

$0 \le x \le 1$のとき $0 \le x(1-x) \le \frac{1}{4}$かつ$0 < e^x \le e$なので$x^n(1-x)^n e^x \le \left(\frac{1}{4}\right)^n e$となる. したがって

$$|J_n| \le \frac{1}{n!}\int_0^1 \left(\frac{1}{4}\right)^n e \, \mathrm{d}x = \frac{e}{n!4^n} \tag{18}$$

が成立する. $n \to \infty$のとき$\frac{e}{n!4^n} \to 0$なので, はさみうちの原理より$\lim_{n\to\infty} J_n = 0$となる.

(b) 数学的帰納法を用いて$n \ge 0$に対して$J_n = q_n e - p_n$を示す.
$n = 0$のとき, $J_0 = e - 1 = q_0 e - p_0$なので成立する.
$n = 1$のとき, $J_1 = e - 3 = q_1 e - p_1$なので成立する.

次に$n=k-1, k-2(k\geq 2)$のとき成立すると仮定し$n=k$のときも成立することを示す. つまり$J_{k-1}=q_{k-1}e-p_{k-1}$及び$J_{k-2}=q_{k-2}e-p_{k-2}$を仮定し$J_k=q_ke-q_k$を示す.

$$\begin{aligned} J_k &= 2(2k-1)J_{k-1}+J_{k-2} \quad \because (\mathrm{a}.3)\text{の結果より} \\ &= 2(2k-1)(q_{k-1}e-p_{k-1})+(q_{k-2}e-p_{k-2}) \quad \because \text{帰納法の仮定より} \\ &= \{2(2k-1)q_{k-1}+q_{k-2}\}e-\{2(2k-1)p_{k-1}+p_{k-2}\} \\ &= q_ke-p_k \quad \because \text{数列}p_n\text{及び}q_n\text{の定義より} \end{aligned} \tag{19}$$

$n=k$のときも成立する. したがって数学的帰納法により$n\geq 0$に対して$J_n=q_ne-p_n$が成立する.

(c) ラスト

q_nは定義より常に自然数なので, $\frac{p_n}{q_n}=e-\frac{J_n}{q_n}$の両辺で$n\to\infty$とすれば$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=e$が証明される. □

数値計算

以下の python コードで数値計算を行う.

```python
# method_B.py
# calculate the number e
# [0] init
from decimal import *
getcontext().prec = 200
N = 30
digits = 50

# [1] calculate sequences p[n], q[n]
p = {}
q = {}
p[0] = 1
p[1] = 3
q[0] = 1
q[1] = 1
for n in range(2, N+1):
    p[n] = 2*(2*n - 1)*p[n-1] + p[n-2]
    q[n] = 2*(2*n - 1)*q[n-1] + q[n-2]

# [2] print result
print("n, p[n] / q[n]")
for n in range(0, N+1):
    p_q = str(Decimal(p[n]) / Decimal(q[n]))[:2 + digits]
    print(f"{n:0>2d}" + ", " + p_q)
```

方法 C

方法 B を少し改良してネイピア数eの下限値及び上限値を求めます. 此処からは文献の要約ではなく, 私が独自に探求した内容なので間違えている可能性も十分にあります. 注意して下さい.

補題 $n\geq 8$のとき$q_n\geq 3^n n!$が成立する.

[証明] 数学的帰納法を用いる.

$n=8$のとき$q_8=312129649$かつ$3^8\cdot 8!=264539520$なので成立する.

$n=9$のとき$q_9=10622799089$かつ$3^9\cdot 9!=7142567040$なので成立する.

次に$n=k-1, k-2, (k \geq 10)$のとき成立すると仮定して, $n=k$のときも成立することを示す. つまり$q_{k-1} \geq 3^{k-1}(k-1)!$及び$q_{k-2} \geq 3^{k-2}(k-2)!$を仮定して$q_k \geq 3^k k!$を示す. 数列$q_n$の定義より$q_k = 2(2k-1)q_{k-1} + q_{k-2}$である. 数列$q_n$の定義より$q_n$は常に自然数なので

$$q_k \geq 2(2k-1)q_{k-1} \tag{20}$$

となる. この上式に帰納法の仮定を適用すると

$$q_k \geq 2(2k-1)3^{k-1}(k-1)! \tag{21}$$

であり

$$\begin{aligned} q_k &\geq 3^k k! \frac{2(2k-1)}{3k} \\ &= 3^k k! \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3k}\right) \\ &\geq 3^k k! \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 10}\right) \quad \because k \geq 10 \text{より} \\ &= \frac{13}{10} 3^k k! \\ &\geq 3^k k! \end{aligned} \tag{22}$$

となる. よって$n=k$のときも成立するので, 数学的帰納法により題意は証明された. □

定理 $n \geq 8$のとき

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{2}{12^n (n!)^2} \leq e \leq \frac{p_n}{q_n} + \frac{2}{12^n (n!)^2} \tag{23}$$

が成立する.
[証明] まず式(18)の$|J_n|$の見積りを少し改善して

$$|J_n| \leq \frac{2}{4^n n!} \tag{24}$$

を示す. $0 \leq x \leq 1$のとき$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$かつ$0 < e^x$であり, これを式(17)に適用すると

$$\begin{aligned} |J_n| &\leq \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\right)^n e^x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4^n n!} \int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4^n n!}(e-1) \\ &\leq \frac{2}{4^n n!} \end{aligned} \tag{25}$$

が得られる. (b)の結果より

$$\frac{p_n}{q_n} - e = -\frac{J_n}{q_n} \tag{26}$$

なので, 両辺の絶対値をとってやると

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - e\right| = \frac{|J_n|}{q_n}. \tag{27}$$

が成立する. これに補題の$q_n \geq 3^n n!$及び先ほどの$|J_n| \leq \frac{2}{4^n n!}$を適用すると

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - e\right| \leq \frac{2}{4^n n!} \cdot \frac{1}{3^n n!} = \frac{2}{12^n (n!)^2} \tag{28}$$

が示される. よって題意は証明された.

数値計算

数列a_n, b_nを

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{p_n}{q_n} - \frac{2}{12^n (n!)^2} \\ b_n &= \frac{p_n}{q_n} + \frac{2}{12^n (n!)^2} \end{aligned} \tag{29}$$

で定義する. そして以下の python コードで数値計算を行う.

```
# method_C.py
# calculate the number e
# [0] init
from decimal import *
getcontext().prec = 200
from fractions import Fraction
from math import *
Ns = 8 # start of N
N = 30
digits = 50

# [1] calculate sequences a[n], b[n], p[n], q[n]
p = {}
q = {}
p[0] = Fraction(1)
p[1] = Fraction(3)
q[0] = Fraction(1)
q[1] = Fraction(1)
a = {}
b = {}
# calculate a[0], b[0], a[1], b[1]
for n in range(0, 1+1):
    a[n] = p[n] / q[n] - Fraction(2, 12 ** n * factorial(n)**2)
    b[n] = p[n] / q[n] + Fraction(2, 12 ** n * factorial(n)**2)

for n in range(2, N+1):
    p[n] = 2*(2*n - 1)*p[n-1] + p[n-2]
    q[n] = 2*(2*n - 1)*q[n-1] + q[n-2]
    a[n] = p[n] / q[n] - Fraction(2, 12 ** n * factorial(n)**2)
    b[n] = p[n] / q[n] + Fraction(2, 12 ** n * factorial(n)**2)

# [2] print a[n], b[n]
```

```
print("n, a[n], b[n]")
decimal_from_frac = lambda x: Decimal(x.numerator) / Decimal(x.denominator)
for n in range(Ns, N+1):
    a_n = str(decimal_from_frac(a[n]))[:2 + digits]
    b_n = str(decimal_from_frac(b[n]))[:2 + digits]
    print(f"{n:0>2d}" + ", " + a_n + ", " + b_n)
```

参考文献

Stein, W. (2009). Elementary Number Theory: Primes, Congruences, and Secrets: A Computational Approach. Springer.

Zhou, L., & Markov, L. (2010). Recurrent proofs of the irrationality of certain trigonometric values. The American Mathematical Monthly, 117(4), 360–362.

亀谷俊司. (2004). 解析学入門. 朝倉書店.

method_A.py の出力
n, a[n], b[n]
01, 2, 3
02, 2.5, 2.75
03, 2.66666666666666666666666666666666666666666666666666, 2.72222222222222222222222222222222222222222222222222
04, 2.70833333333333333333333333333333333333333333333333, 2.71875
05, 2.71666666666666666666666666666666666666666666666666, 2.71833333333333333333333333333333333333333333333333
06, 2.71805555555555555555555555555555555555555555555555, 2.71828703703703703703703703703703703703703703703703
07, 2.71825396825396825396825396825396825396825396825396, 2.71828231292517006802721088435374149659863945578231
08, 2.71827876984126984126984126984126984126984126984126, 2.71828187003968253968253968253968253968253968253968
09, 2.71828152557319223985890652557319223985890652557319, 2.71828183176562806192435822065451695081324710954340
10, 2.71828180114638447971781305114638447971781305114638, 2.71828182870370370370370370370370370370370370370370
11, 2.71828182619849286515953182619849286515953182619849, 2.71828182847595726383605171483959362747241535120322
12, 2.71828182828616856394634172411950189727967505745283, 2.71828182846014153884524254894625264995635366005736
13, 2.71828182844675900231455787011342566898122453678009, 2.71828182845911211295826680442065057449672834288218
14, 2.71828182845822974791228759482727736695990664244632, 2.71828182845904908688355400373540963110124107856534
15, 2.71828182845899446428546957647486748015848544949074, 2.71828182845904544537701504191804015437172403662703
16, 2.71828182845904225905879345032784186223339662493101, 2.71828182845904524623212619244365276111307857339603
17, 2.71828182845904507051604779584860506117897963525103, 2.71828182845904523589588628676159113170519040056397
18, 2.71828182845904522670811748171086968334262313582436, 2.71828182845904523538545468648099549568504777474510
19, 2.71828182845904523492875272833519940029860437269664, 2.71828182845904523536141774131542728013839285884782
20, 2.71828182845904523533978449066641588614640343454026, 2.71828182845904523536033607878297671043879338763244
21, 2.71828182845904523535935743172980714737725100891376, 2.71828182845904523536028947654234958838824375055060
22, 2.71828182845904523536024711086905220470592589865801, 2.71828182845904523536028755082992698003904748455548
23, 2.71828182845904523536028579257075851154630306777733, 2.71828182845904523536028747438387617706110207513034
24, 2.71828182845904523536028740430832960766465211649063, 2.71828182845904523536028747146406173666958332685369
25, 2.71828182845904523536028746877783245150938607843916, 2.71828182845904523536028747135661256526317543691711
26, 2.71828182845904523536028747125742871473418353851411, 2.71828182845904523536028747135279780178129113313238
27, 2.71828182845904523536028747134926561337213899999837, 2.71828182845904523536028747135266697998835957264593
28, 2.71828182845904523536028747135254550260920883790852, 2.71828182845904523536028747135266264151053276069102
29, 2.71828182845904523536028747135265860223807331507783, 2.71828182845904523536028747135266250222527553842850
30, 2.71828182845904523536028747135266237222570213098348, 2.71828182845904523536028747135266249789195642484700

method_B.py の出力
n, p[n] / q[n]
00, 1
01, 3
02, 2.714285714285714285714285714285714285714285714285714
03, 2.718309859154929577464788732394366197183098591549296
04, 2.718281718281718281718281718281718281718281718281718
05, 2.718281828735695726684725523798993863674056056166730
06, 2.718281828458563411277850606202642376785584483618617
07, 2.718281828459045851404621084949961134721768973083786
08, 2.718281828459045234757560631479773329703773190735878
09, 2.718281828459045235360753230188480692633383946700756
10, 2.718281828459045235360287179900086259351744270348096
11, 2.718281828459045235360287471503357984170958205123069
12, 2.718281828459045235360287471352597036092056850785316
13, 2.718281828459045235360287471352662521984043872659320
14, 2.718281828459045235360287471352662497749516857440014
15, 2.718281828459045235360287471352662497757249242165527
16, 2.718281828459045235360287471352662497757247093175178
17, 2.718281828459045235360287471352662497757247093700070
18, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
19, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
20, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
21, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
22, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
23, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
24, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
25, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
26, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
27, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
28, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
29, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959
30, 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959

method_C.py の出力
n, a[n], b[n]
08, 2.71828182845904523189642147881102117993646168123930, 2.71828182845904523761869978414852547947108470023245
09, 2.71828182845904523535780967138943876655337642457164, 2.71828182845904523536369678898752261871339146882986
10, 2.71828182845904523536028472693442039108001093074631, 2.71828182845904523536028963286575212762347760994986
11, 2.71828182845904523536028746981398769087325039979276, 2.71828182845904523536028747319272827746866601045337
12, 2.71828182845904523536028747135161939124639845506464, 2.71828182845904523536028747135357468093771524650599
13, 2.71828182845904523536028747135266203991064857759240, 2.71828182845904523536028747135266300405743916772625
14, 2.71828182845904523536028747135266249754455367916829, 2.71828182845904523536028747135266249795448003571172
15, 2.71828182845904523536028747135266249775717332987727, 2.71828182845904523536028747135266249775732515445377
16, 2.71828182845904523536028747135266249775724706846414, 2.71828182845904523536028747135266249775724711788620
17, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369294, 2.71828182845904523536028747135266249775724709370719
18, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369996
19, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
20, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
21, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
22, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
23, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
24, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
25, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
26, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
27, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
28, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
29, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995
30, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995, 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995