$\sqrt{2}$は無理数である.

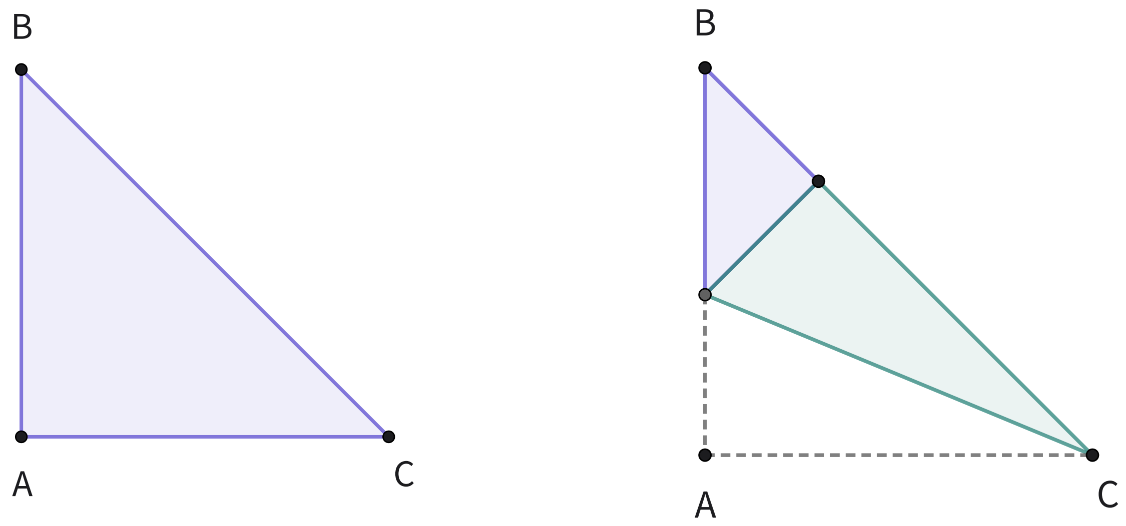
2025 年 4 月 19 日(土)

はじめに

$\sqrt{2}$が無理数であることを証明します. 通常は整数論の知識を用いますが, 今回は折紙による証明を紹介します. 折紙といってもアホほどシンプルで三角形の紙を 1 回折るだけです. ところがこの折り方を注意深く観察することで$\sqrt{2}$の無理数性に辿り着きます. 凄いです!

論証

(Toth, 2021) の 103 ページを参考にする. まず折紙の手順を説明します. 表が紫色裏が緑色の直角 2 等辺 3 角形 ABC の紙を準備します. そして下図の様に角 C の 2 等分線で折ります. 折る手順はたったこれだけですが, この手順を注意深く観察することで証明ができます.



$\sqrt{2}$が有理数と仮定して矛盾を導き無理数であることを示す. つまり

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

でa, bは共に自然数と仮定して矛盾を導く. 三角形 ABC において辺 BC の長さをa, 辺 AB の長さをbと定める. このとき下図を用いて辺 BE の長さが$a-b$, 辺 BD の長さが$2b-a$であることを示す.

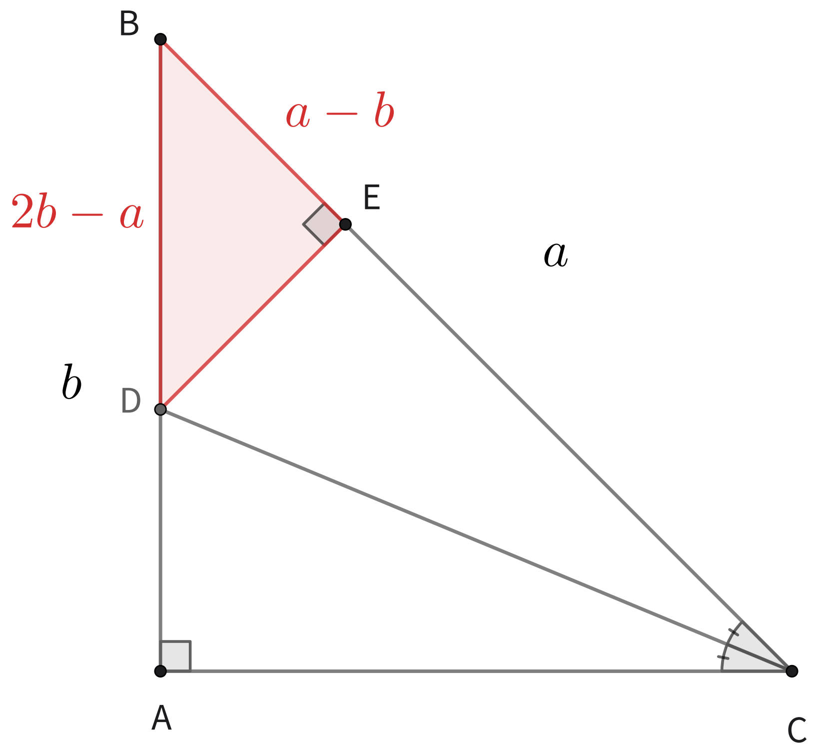


Figure 1: 辺 BE と辺 BD の長さ

三角形 ABC は 2 等辺 3 角形なので, AC=AB= b. 点 A が点 E に重なるように折ったので, CE=AC= b. したがって BE=BC−CE= $a-b$となる. そして赤色の三角形 BED も直角 2 等辺 3 角形なので DE=BE= $a-b$. 点 A が点 E に重なるように折ったので, AD=DE= $a-b$が成り立つ. したがって BD=AB−AD= $b-(a-b)=2b-a$となる.

3 角形 BED は直角 2 等辺 3 角形なので

$$\sqrt{2}=\frac{2b-a}{a-b}$$

となる. 全体の 3 角形 ABC から赤色の三角形 EBD を作りだす操作は, 有理数$\frac{a}{b}$から有理数$\frac{2b-a}{a-b}$を作り出す操作に対応している. 今この操作を複数回繰り返すことを考える.

$$1<\sqrt{2}=\frac{a}{b}<2$$

なので$a>2b-a>0$かつ$b>a-b>0$である. つまり分子と分母がそれぞれ強く単調減少していく. この様子の具体例を$a=577, b=408$で見てみる.

$$\frac{577}{408}\to\frac{239}{169}\to\frac{99}{70}\to\frac{41}{29}\to\frac{17}{12}\to\frac{7}{5}\to\frac{3}{2}\to\frac{1}{1}\to\frac{1}{0}$$

この様に有理数を作り出す操作はある有限回で止まってしまう. ところが、小さい 3 角形を折ることで作り出す操作は幾何学的に捉えれば, 任意の有限回繰り返せる. したがって, 代数的に分析した結果と幾何学的に分析した結果の間に矛盾が生じる. $\sqrt{2}$は有理数ではなく無理数である.

参考文献

Toth, G. (2021). Elements of Mathematics: A Problem-Centered Approach to History and Foundations. Springer International Publishing.