三角形の内角の和は 180 度である.

2025 年 4 月 17 日(水)

はじめに

「三角形の内角の和は 180 度」は小学生でも知っている定理ですが、本当にそうなのか気になったので調べてみました. 残念ながらネット上では納得できる日本語情報がなかったです. そこで(Rosenthal et al., 2019) の 11 章をまとめ直すことにしました. はたしてこの定理は自明なのでしょうか？ その真相に迫りたいと思います. 定義, 公理, 公準, 定理および系の番号は原書と同じものを流用します.

論証

定義 1.1 三角形の合同
対応する辺と角が互いに等しいとき、2 つの三角形は合同であるという.

公理 1.2 Side-Angle-Side 合同公理
対応する 2 つの辺とその間の角が等しいとき, 2 つの三角形は合同である.

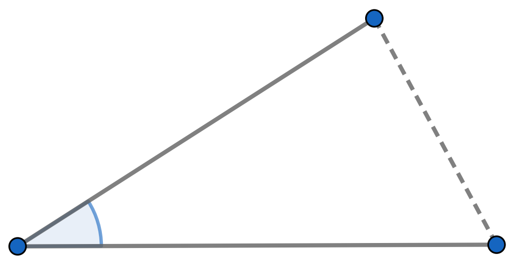

Figure 1: SAS 合同公理

定義 1.10 対頂角
2 本の直線が交わるとき, 互いに向き合う角の対を対頂角という. 下図の青の角の組は対頂角である.

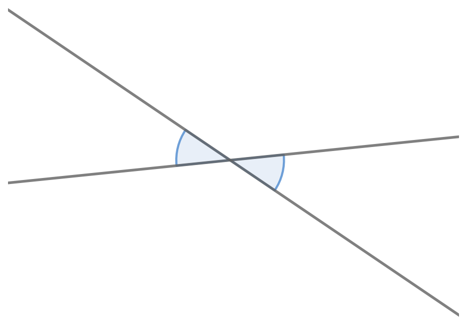

Figure 2: 対頂角

定理 1.11 対頂角は等しい.
[証明] 下図において緑と赤の角が等しいことを証明する.

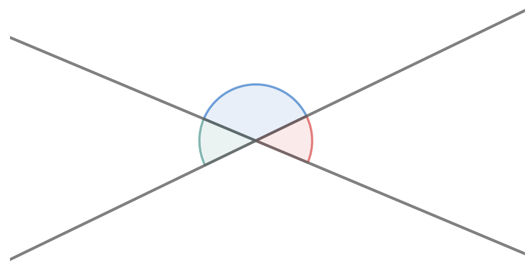

Figure 3: 対頂角は等しい

青と赤の角は合計で 180 度になる. 同様に青と緑の角の合計は 180 度である. したがって緑と赤の角は等しい. □

定理 1.13 3 角形の 2 つの角の合計は 180 度未満である.
[証明] 下図のように任意の三角形 ABC を考える. 青の角と赤の角の合計が 180 度未満であることを証明する.

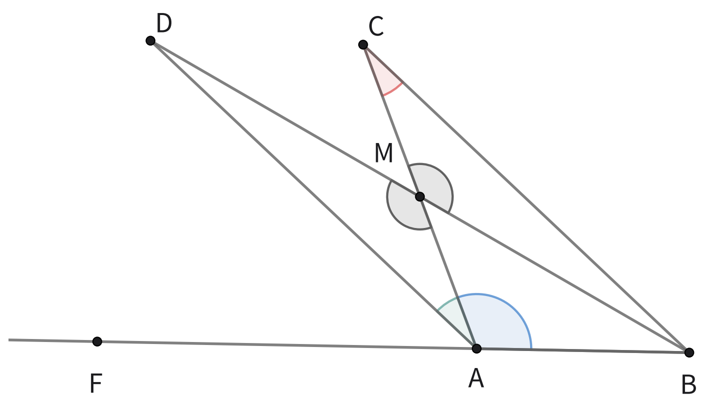

Figure 4: 3 角形の 2 つの角の合計は 180 度未満

辺 BA を点 F まで延長する. 辺 AC の中点を点 M とする. 点 B から点 M を通る直線を引き, 辺 DM と辺 MB が等しくなるように点 D を定める. 線分 DM を描く. 定理 1.11 より対頂角である角 DMA と角 CMB は等しい. 点 M と点 D の構成法より, 辺 AM と辺 MC は等しく, 辺 DM と辺 MB も等しい. したがって公理 1.2 より三角形 CMB と三角形 AMD は合同である. その結果赤の角と青の角の合計は緑の角と青の角の合計である. 後者の合計を角 DAF と合算すると 180 度なので, 角 DAB は 180 度未満である. □

定義 2.1 平面内の 2 直線が交わらないとき, それらは平行であるという.

公準 2.2 プレイフェアの平行線公準
直線とその直線上にない点があるとき, その直線と平行でその点を通る直線は存在してかつ一意である.

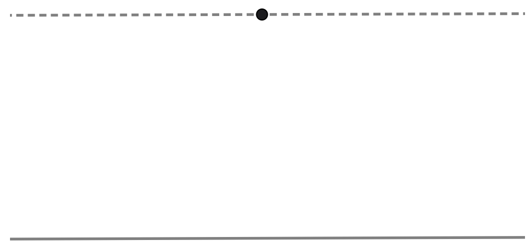

Figure 5: 平行線公準

同位角と錯角の定義
下図のように 2 本の直線L_1,L_2に 1 本の直線 T が交わっているとする. このとき赤と青の位置関係にある角の組を同位角といい, 赤と緑の位置関係にある角の組を錯角という.

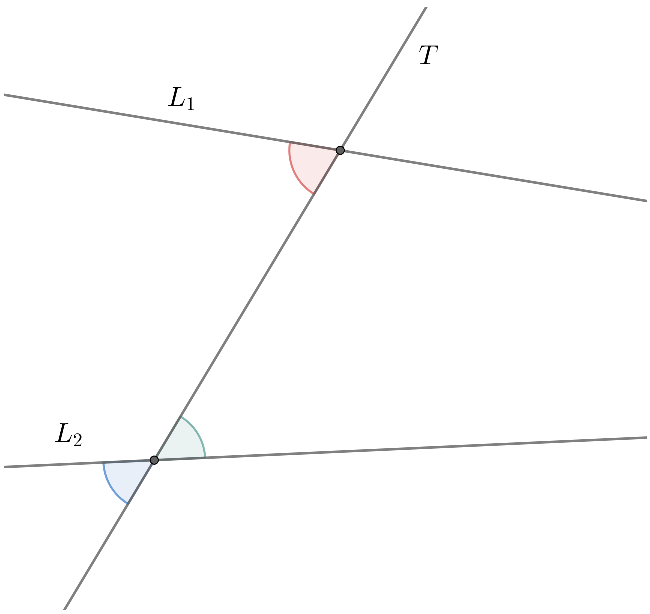

Figure 6: 同位角と錯角

定理 2.3 同位角が等しいとき 2 直線は平行である.
[証明] 下図のように青と緑の同位角が等しいかつ 2 直線L_1,L_2が点 P で交わると仮定して矛盾を導く.

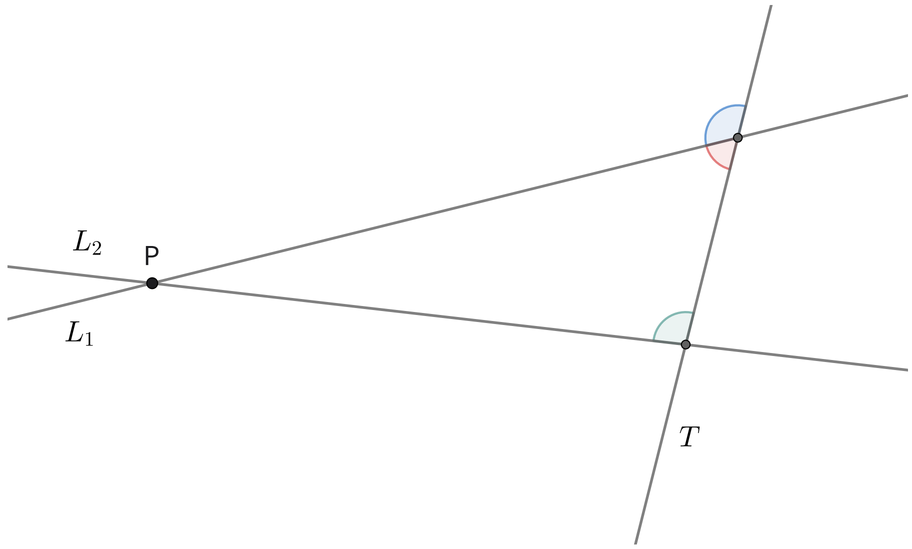

Figure 7: 同位角が等しければ平行

明らかに青と赤の角の合計は 180 度である. そして仮定により青と緑の角は等しいので, 赤と緑の角の合計は 180 度となる. しかしこれは定理 1.13 に矛盾している. したがって直線 L_1, L_2は交わらない. □

定理 2.4 2 直線が平行ならば同位角は等しい.
[証明] 下図のように 2 直線L_1,L_2が平行かつ赤と青の同位角が異なると仮定して矛盾を導く.

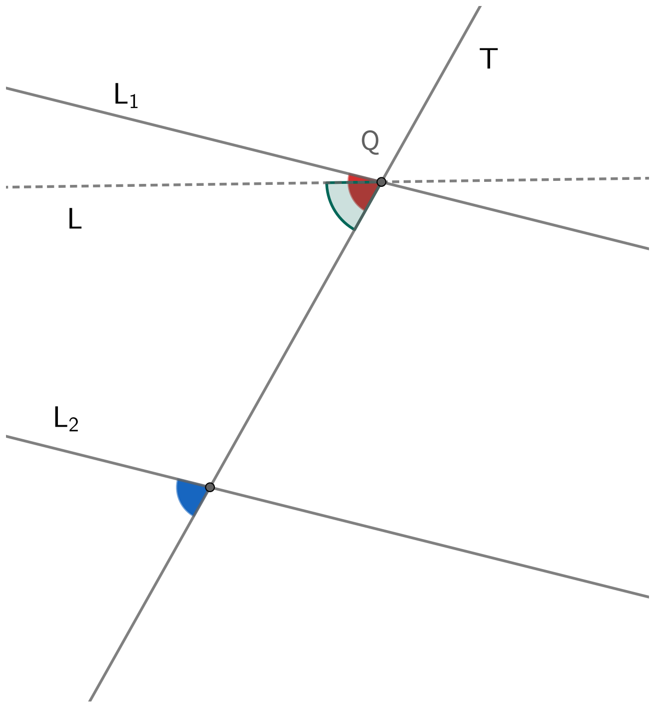

Figure 8: 平行ならば同位角は等しい

まず赤の角が青の角より大きい場合を考える. 点 Q を通り緑の角が青の角に等しい直線 L を引く. すると同位角が等しいので定理 2.3 より直線L, L_2は平行となる. したがって 2 本の異なる直線L,L_1は点 Q を通り直線L_2に平行となる. これは公準 2.2 の一意性に矛盾する. 赤の角が青の角より小さい場合も同様に矛盾する. したがって同位角は等しい. □

系 2.5 2 直線が平行ならば錯角は等しい.
[証明]

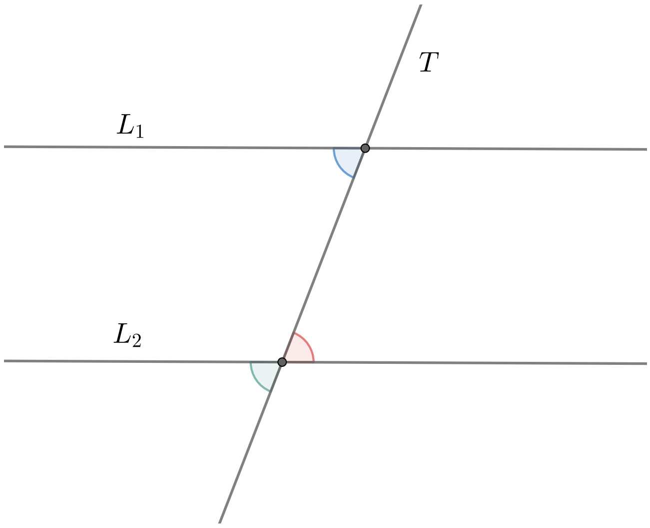

Figure 9: 平行ならば錯角は等しい

2 直線L_1, L_2が平行なので, 定理 2.4 より青と緑の同位角は等しい. そして定理 1.11 より緑と赤の対頂角は等しい. したがって青と赤の錯角は等しい. □

定理 2.6 3 角形の内角の和は 180 度である.
[証明] 三角形 ABC が与えられているとする. 公準 2.2 を用いて点 A を通り辺 BC に平行な直線を下図のように引く.

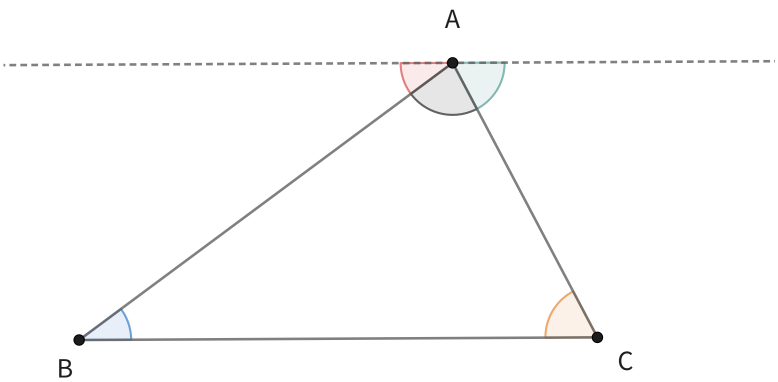

Figure 10: 平行ならば同位角は等しい

すると系 2.5 より青と赤の錯角は等しい. 同様に緑と橙の錯角も等しい. 明らかに赤, 黒, 緑の角の合計は 180 度である. したがって青, 橙, 黒の角の合計も 180 度となる. □

終わりに

感想を一言でいうと全然簡単じゃないやん. これは小学生には少し難しすぎると思います. てっきり平行線公準を認めれば簡単に証明できると思い込んでいましたがそうではなかったです. そして私はど素人なので, もしかしたら論証に間違いがあるかもしれないです. 不明点や疑問があれば容赦なく指摘して下さい. 皆様の感想をお待ちしております.

参考文献

Rosenthal, D., Rosenthal, D., & Rosenthal, P. (2019). A Readable Introduction to Real Mathematics Second Edition. Springer International Publishing.