

$$\pi = \frac{9}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{及び} \quad \pi = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

を高校数学で証明する.

2025 年 11 月 24 日(月)

はじめに

Gosper の定理と Euler の定理は円周率に収束する級数を表している. この 2 つの定理は通常大学レベルの数学で証明される. しかし, 高校数学だけで扱えないかと疑問に思い調査してみた. すると意外なことに高校数学だけでほぼ証明できた. この感動を皆様と共有したいと願い, 本稿を執筆した.

Gosper の定理

高校数学による証明

2 つの補題を示してから、定理を証明する.

補題 1

$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx, \quad n \geq 0.$$

[証明] 上式の右辺を I_n とおく. 証明は次の(a),(b)から構成されている.

(a) まず最初に漸化式 $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$, $n \geq 1$ を示す.

$$I_n = \int_0^1 x^n \left(-\frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right)' dx$$

なので、部分積分を用いると

$$\begin{aligned} I_n &= \left[x^n \left(-\frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} \left(-\frac{1}{n+1} \right) (1-x)^{n+1} dx \\ &= \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{n+1} dx \quad \text{式(1)} \end{aligned}$$

続いて

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{n+1} dx &= \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^n (1-x) dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^n dx - \int_0^1 x^n (1-x)^n dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^n dx - I_n \quad \because I_n \text{ の定義より} \quad \text{式(2)} \end{aligned}$$

式(1)と(2)より

$$I_n = \frac{n}{n+1} \left(\int_0^1 x^{n-1} (1-x)^n dx - I_n \right).$$

ここで $J_n = \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^n dx, n \geq 1$ とおく. すると上式より

$$I_n = \frac{n}{n+1} (J_n - I_n)$$

なので

$$I_n = \frac{n}{2n+1} J_n \quad \text{式(3)}$$

となる. 次に

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{n-1} (1-x) dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{n-1} dx - \int_0^1 x^n (1-x)^{n-1} dx \\ &= I_{n-1} - \int_0^1 x^n (1-x)^{n-1} dx \quad \because I_n \text{ の定義より} \quad \text{式(4)} \end{aligned}$$

$\int_0^1 x^n (1-x)^{n-1} dx$ に $x = 1-t$ で置換積分をする. x が 0 から 1 へと変化するとき t は 1 から 0 に変化し, $\frac{dx}{dt} = -1$ なので

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n (1-x)^{n-1} dx &= \int_1^0 (1-t)^n t^{n-1} (-dt) \\ &= \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^n dt \\ &= J_n \quad \because J_n \text{ の定義より} \quad \text{式(5)} \end{aligned}$$

式(4)と(5)より $J_n = I_{n-1} - J_n$ が成立し

$$J_n = \frac{1}{2} I_{n-1} \quad \text{式(6)}$$

となる. 更に式(3)と(6)より

$$I_n = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{1}{2} I_{n-1} \right) = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}.$$

よって(a)の漸化式が示された.

(b) 漸化式から数学的帰納法を用いて補題 1 を示す.

$n = 0$ のとき

$$I_0 = \int_0^1 x^0 (1-x)^0 dx = 1 = \frac{(0!)^2}{(2 \cdot 0 + 1)!}$$

なので成立する. 次に $n = k (\geq 1)$ のとき成立すると仮定して $n = k + 1$ の場合を示す.

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= \frac{k+1}{2(2(k+1)+1)} I_k \quad \because (a) \text{の漸化式より} \\
&= \frac{k+1}{2(2k+3)} I_k \\
&= \frac{k+1}{2(2k+3)} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} \quad \because \text{帰納法の仮定より} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(2k+3)(2k+2)} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} \quad \because \text{分母と分子に} k+1 \text{を掛ける} \\
&= \frac{((k+1)!)^2}{(2k+3)!} \\
&= \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1)+1)!}
\end{aligned}$$

$n = k + 1$ の場合が示されたので証明終了. $\square$

補題 2

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi.$$

[証明] 上式の左辺を I とおく. このとき

$$I = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx.$$

ここで $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta + \frac{1}{2}$ で置換積分する. x が 0 から 1 へ変化するとき θ は $-\frac{\pi}{6}$ から $\frac{\pi}{6}$ に変化し, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta}$ なので

$$I = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 1 d\theta = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$$

となる. $\square$

以上で準備が整ったので, 次の定理を証明する.

Gosper の定理

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{9}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{9}{2\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{2^1} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} \frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \frac{1}{2^4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \frac{1}{2^5} + \dots \right).
\end{aligned}$$

[証明] $I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ とおく. すると補題 1 より

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$$

となる. 上式で無限和と積分を入れ替える. この入れ替えの正当性は大学レベルの話になるが, 今回は高校数学なので気にしない. すると

$$I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x)^n dx$$

となる. 上式の積分の中身は初項が1公比が $x(1-x)$ の無限等比級数になっている. 積分区間 $0 \leq x \leq 1$ において $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ なので公比の絶対値は1より小さく, この級数は収束する. その収束値は $\frac{1}{1-x(1-x)} = \frac{1}{x^2-x+1}$ である. よって

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx.$$

補題 2 より $I = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$ である. したがって

$$\frac{9}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{9}{2\sqrt{3}} I = \frac{9}{2\sqrt{3}} \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi = \pi$$

が成立する. $\square$

大学数学では

(Gourévitch, 2013) によると, 次のマクローリン展開

$$\begin{aligned} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}x^5 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^7 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}x^9 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}x^{11} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}x^{13} + \dots \end{aligned}$$

, $-1 < x < 1$ が知られている. この式に $x = \frac{1}{2}$ を代入してやると, Gosper の定理が出てくる.

そして補題 1 はベータ関数 B とガンマ関数 Γ の性質から導出される. まず $I =$

$\int_0^1 x^n (1-x)^n dx$ とおく. するとベータ関数の定義式

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

から, $I = B(n+1, n+1)$ が得られる. これにベータ関数とガンマ関数の関係式

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を用いると $I = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}$ が成立する. 最後にガンマ関数の性質

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

を使うと $I = \frac{n!n!}{(2n+1)!} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ が得られ, 補題 1 を証明できる.

数値実験

理論だけでは不安なので数値実験も行う.

数列 a_n, A_n, S_n を $n \geq 0$ の範囲で

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$A_n = \sum_{k=0}^n \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}$$

$$S_n = \frac{9}{2\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{9}{2\sqrt{3}} A_n$$

と定義する. そして以下の python コードで数値計算を行う.

```
# Gosper.py
# calculate the number pi
# [0] init
from decimal import *
getcontext().prec = 200
N = 30
digits = 100

# [1] calculate sequences a[n], A[n], S[n]
a = {}
A = {}
S = {}
a[0] = Decimal(1)
A[0] = a[0]
S[0] = Decimal(9) / (Decimal(2) * Decimal(3).sqrt()) * A[0]

for n in range(1, N+1):
    a[n] = Decimal(n) / Decimal(2 * (2*n + 1)) * a[n-1]
    A[n] = A[n-1] + a[n]
    S[n] = Decimal(9) / (Decimal(2) * Decimal(3).sqrt()) * A[n]

# [2] print S[n]
print("n, S[n]")
for n in range(0, N+1):
    S_n = str(S[n])[:2 + digits]
    print(f"{n:0>2d}" + ", " + S_n)
```

出力を見ると, 確かに部分和 S_n が $\pi = 3.14159265\dots$ に収束していることが確認できる.

Euler の定理

高校数学による証明

補題を示してから, 定理を証明する.

補題 3

$$\int_0^1 \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

[証明] 上式の左辺を I とおく. このとき

$$I = 2 \int_0^1 \frac{1}{(2x-1)^2 + 1} dx.$$

ここで $x = \frac{\tan \theta + 1}{2}$ で置換積分する. x が 0 から 1 へ変化するとき θ は $-\frac{\pi}{4}$ から $\frac{\pi}{4}$ に変化し, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2 \cos^2 \theta}$ なので

$$I = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \left(\frac{1}{2 \cos^2 \theta} d\theta \right) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta = \frac{\pi}{2}$$

となる. $\square$

以上で準備が整ったので、次の定理を証明する.

Euler の定理

$$\begin{aligned} \pi &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots \right). \end{aligned}$$

[証明] $I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ とおく. すると補題 1 より

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \int_0^1 x^n (1-x)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 2^n x^n (1-x)^n dx$$

となる. 上式で無限和と積分を入れ替える. この入れ替えの正当性は大学レベルの話になるが、今回は高校数学なので気にしない. すると

$$I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n (1-x)^n dx$$

となる. 上式の積分の中身は初項が 1 公比が $2x(1-x)$ の無限等比級数になっている. 積分区間 $0 \leq x \leq 1$ において $0 \leq 2x(1-x) \leq \frac{1}{2}$ なので公比の絶対値は 1 より小さく、この級数は収束する. その収束値は $\frac{1}{1-2x(1-x)} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$ である. よって

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} dx.$$

補題 3 より $I = \frac{\pi}{2}$ である. したがって

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = 2I = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$$

が成立する. $\square$

大学数学では

オイラーの定理は以下のライプニッツ級数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

にオイラー変換することで得られる. (Knopp, 1990) の 246 ページ, (Euler, 1755) の 12 ページ及び (Penn, 2020) が参考になる.

数値実験

理論だけでは不安なので数値実験も行う.

数列 a_n, A_n, S_n を $n \geq 0$ の範囲で

$$a_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$
$$A_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$$
$$S_n = 2 \sum_{k=0}^n \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!} = 2A_n$$

と定義する. そして以下の python コードで数値計算を行う.

```
# Euler.py
# calculate the number pi
# [0] init
from decimal import *
getcontext().prec = 200
N = 30
digits = 100

# [1] calculate sequences a[n], A[n], S[n]
a = {}
A = {}
S = {}
a[0] = Decimal(1)
A[0] = a[0]
S[0] = Decimal(2) * A[0]

for n in range(1, N+1):
    a[n] = Decimal(n) / Decimal(2*n + 1) * a[n-1]
    A[n] = A[n-1] + a[n]
    S[n] = Decimal(2) * A[n]

# [2] print S[n]
print("n, S[n]")
for n in range(0, N+1):
    S_n = str(S[n])[:2 + digits]
    print(f"{n:0>2d}" + ", " + S_n)
```

出力を見ると, 確かに部分和 S_n が $\pi = 3.14159265\dots$ に収束していることが確認できる.

まとめ

Gosper の定理と Euler の定理を高校数学でほぼ証明できた. 証明は完璧ではなく, 無限和と積分を入れ替えを認める必要があった. 本稿は私自身で考えた内容なので, もしかしたら間違いがあるかもしれない. 訂正やコメントなどを京都アカデメイアにメールしてもらえると幸いです.

参考文献

- Euler, L. (1755). On the transformation of series. <https://download.uni-mainz.de/mathematik/Algebraische%20Geometrie/Euler-Kreis%20Mainz/E212%20Kapitel%201RevisedVersion2.pdf>
- Gourévitch, B. (2013,). The world of Pi - V2.57. <http://www.pi314.net/eng/schrogosper.php>
- Knopp, K. (1990). Theory and Application of Infinite Series. Dover Publications.
- Penn, M. (2020,). The Euler transform of a series. <https://youtu.be/s873ihX7yuM?si=fDZ6JXVxpmOAaF8w>

Gosper.py の出力

n, S[n]

00, 2.5980762113533159402911695122588085504142078807155709420837104691778995253632000556217192801358728635
01, 3.0310889132455352636730310976352766421499091941681660990976622140408827795904000648920058268251850074
02, 3.1176914536239791283494034147105702604970494568586851305004525630134794304358400667460631361630474362
03, 3.1362491408479313850657689112267046072857223702923677800867647806504644270455772100005039881640179566
04, 3.1403730713421429976694056882302900176832052399442972577726119401253499818477410196126019552753447389
05, 3.1413103282726456368975049557311048836826331648651903208830317490969148806664146127062605841642826440
06, 3.1415266183335308613347586328466775450671165321546271816008209357826606265476469803432587292924990836
07, 3.1415770860144040803701178241736444993901626511888291157683050793426679672532678661252249631557495862
08, 3.1415889607628448377902023397799896651132323262557001591018307601803167533016492510150993711235732339
09, 3.1415917732032650171791697250551766780476435650873275114702973687997598868394237895416485730106893610
10, 3.1415924428319364884622571977397450144605986219520006906056465613281987281579415368098745734600027246
11, 3.1415926029605318402908215933817070079506530920718138421380126725849993206471523024609720953065776593
12, 3.1415926413913947247296770483357778863882661649005689985057805392866314628445628862172355005497556437
13, 3.1415926506432691228353274356395356904565804231741582028165394701592466081883839526770766907008910844
14, 3.1415926528764801844470361498163048155765183475850245624777571431284985398230993825122107710821996390
15, 3.1415926534167731832240624516332650877829549422005567462667614188468659426379498897303883711744517087
16, 3.1415926535477533041397051914676796992269395711982615180943988190210156160476106187529768802877249377
17, 3.1415926535795627620763612854274661048633358382405612483953964733490233938756710815156055182152341504
18, 3.1415926535873001977906830380122790143424592545481476692794229298071874479419560589443530247381417968
19, 3.1415926535891849577723767982572975435745534200589700025716857845854581790606665021641761353014141722
20, 3.1415926535896446553288874714877898677775032165250242302039450174582071378701080736812061622680659711
21, 3.1415926535897569070578028684394217143852002598481304950908920394387621161840414806795507037366669917
22, 3.1415926535897843463693155210275983880004150926604453598410346448117866664385585357235904805401027968
23, 3.1415926535897910602434090424055565102679676581357989969607503886796543755433871768513874472047732597
24, 3.1415926535897927044574727619266891116396131843746611121737419994228056512425288848826846635308150057
25, 3.1415926535897931074511158304367706315836439506096763364906517079382839050903577348903555498852370023
26, 3.1415926535897932062986131868637717591170854593088310141532899383288729107511459433828031257834914543
27, 3.1415926535897932305611807198049447631480211023531689804886647766974720303224303218309493489585175471
28, 3.1415926535897932365204078331589170799275491550307256739745463159458998842522194674147045616681730786
29, 3.1415926535897932379849636491526899374411619815362268952549748298289880856417439184480003342832579126
30, 3.1415926535897932383451003252167324433871323487097108021272113496363048564752335375545484750902459866

$$n, S[n]$$
[illegible]