

オイラーによる円周率 π の数値計算

2025 年 12 月 5 日(金)

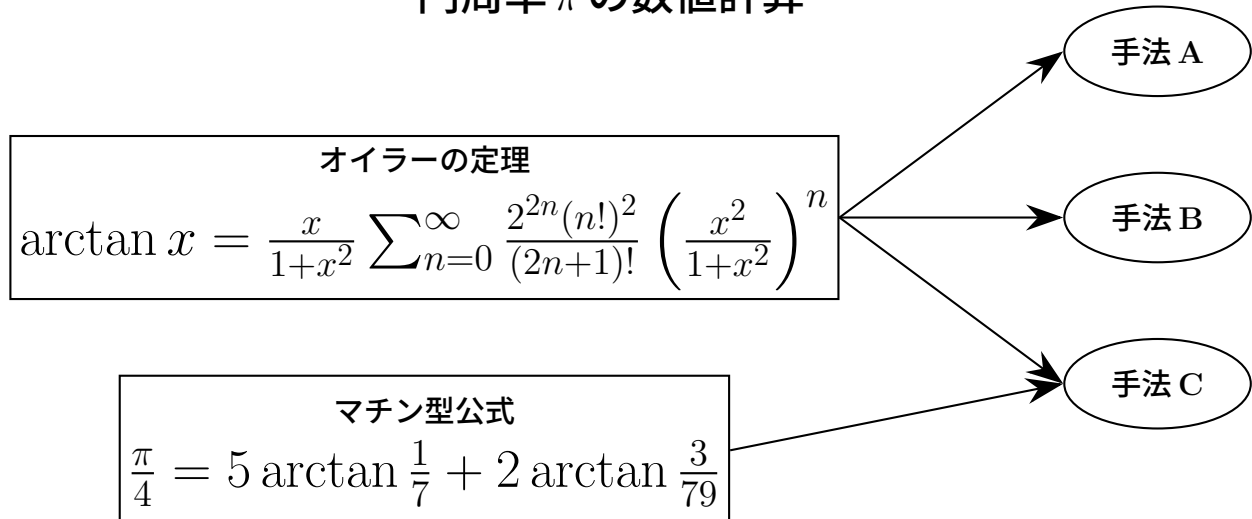
はじめに

オイラーは円周率 π を20桁まで僅か 1 時間の手計算で求めたそうです. 彼は如何なる方法で円周率 π を計算したのでしょうか? 私, 気になります.



事前準備

円周率 π の数値計算



今回は 3 つの計算手法 A,B 及び C を紹介します. $\arctan$ 関数に関するオイラーの定理がこの 3 手法の屋台骨となっています. 手法 A 及び手法 B はオイラーの定理を工夫せずに使います. しかし手法 C はマチン型公式を活用することで巧妙かつ高速に円周率 π を計算します.

定理 1. ウォリスの定理

n を0以上の整数とすると,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \theta \, d\theta = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

[証明] (Mercer, 2023) の 38 ページを参考にする. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta$ とおく. 証明を次の(a)及び(b)から構成する.

(a) $I_1 = 1$ 及び漸化式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \geq 2$ を示す.

まず

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta = [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

次に I_n の漸化式を示す.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta (-\cos \theta)' \, d\theta \\ &= [\sin^{n-1} \theta (-\cos \theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} \cos \theta (-\cos \theta) \, d\theta \quad \because \text{部分積分より} \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \theta \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \theta (1 - \sin^2 \theta) \, d\theta \\ &= (n-1) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta \right\} \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \quad \because I_n \text{ の定義より} \end{aligned}$$

上式を I_n に関して整理すると $I_n = (n-1)/n I_{n-2}$ が得られる.

(b) $I_{2n+1} = (2^{2n} (n!)^2)/(2n+1)!$ を数学的帰納法で証明する.

まず $n=0$ のとき $2^{2 \cdot 0} (0!)^2 / (2 \cdot 0 + 1)! = 1$ なので成立する. 次に $n=k(\geq 0)$ のとき成立すると仮定し $n=k+1$ のときを示す.

$$\begin{aligned}
I_{2(k+1)+1} &= I_{2k+3} \\
&= \frac{2k+2}{2k+3} I_{2k+1} \quad \because (a) \text{の漸化式より} \\
&= \frac{2k+2}{2k+3} \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!} \quad \because \text{帰納法の仮定より} \\
&= \frac{2k+2}{2k+3} \frac{2k+2}{2k+2} \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!} \quad \because \text{分母と分子に} 2k+2 \text{を掛ける} \\
&= \frac{2^{2k+2} ((k+1)!)^2}{(2k+3)!} \\
&= 2^{2(k+1)} \frac{((k+1)!)^2}{((2(k+1)+1)!)}
\end{aligned}$$

よって数学的帰納法により題意が示された. $\square$

定理 2. オイラーの定理

任意の実数 x に対して

$$\arctan x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n.$$

[証明] (Eymard & Lafon, 2004) の 55 ページを参考にする. まず $x = 0$ のとき題意は明らかに成り立つ. なので任意の $x \neq 0$ を固定し, x を定数と見なす. $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ を証明の土台にする. $t = x\sqrt{1-s}$ において $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ を置換積分する. t が 0 から x に変化するとき, s は 1 から 0 に変化する. そして $\frac{dt}{ds} = -\frac{x}{2\sqrt{1-s}}$. 更に

$$1+t^2 = 1+x^2(1-s) = (1+x^2) - sx^2 = (1+x^2) \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2} s \right)$$

であるから置換積分すると

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt &= \int_1^0 \frac{1}{(1+x^2) \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2} s \right)} \left(-\frac{x}{2\sqrt{1-s}} ds \right) \\
&= \frac{x}{1+x^2} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1+x^2} s} ds
\end{aligned}$$

となる. ここで上式の

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{1+x^2} s}$$

を初項が 1 公比が $\frac{x^2}{1+x^2} s$ の無限等比級数の和と見なす. $0 \leq s \leq 1$ 及び $0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} < 1$ なので公比 $\frac{x^2}{1+x^2} s$ の絶対値が 1 より小さいことも確認できる. すると

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt &= \frac{x}{1+x^2} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-s}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2} s \right)^n ds \\
&= \frac{x}{1+x^2} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{1-s}} \left(\frac{x^2}{1+x^2} s \right)^n ds \\
&= \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-s}} \left(\frac{x^2}{1+x^2} s \right)^n ds \quad \because \text{無限和と積分を入れ替える} \\
&= \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n \int_0^1 \frac{s^n}{2\sqrt{1-s}} ds \quad \text{式(1)}
\end{aligned}$$

ここで上式の $\int_0^1 s^n / (2\sqrt{1-s}) ds$ を a_n とおき, $s = \sin^2 \theta$ で置換積分する. s が 0 から 1 へ変化するとき θ は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで変化し, $\frac{ds}{d\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta$ なので

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} \theta}{2\sqrt{1-\sin^2 \theta}} (2 \sin \theta \cos \theta d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} \theta}{2 \cos \theta} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \theta d\theta \\
&= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \because \text{定理 1 より}
\end{aligned}$$

となる. この a_n の結果を式(1)へまめとめると,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt &= \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n
\end{aligned}$$

が得られる. 上式の左辺はもともと $\arctan x$ なので題意が証明される. $\square$

手法 A

手法 A の正当性

系 1

$$\begin{aligned}
\pi &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots \right).
\end{aligned}$$

[証明] 定理 2 で $x = 1$ を代入し両辺に 4 を掛けてやると題意が得られる. $\square$

Python による実装

系 1 に基づくアルゴリズムを実装する. その際, 数列 A_n , a_n 及び S_n を $n \geq 0$ の範囲で

$$A_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}, \quad a_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}, \quad S_n = 2A_n$$

と定義する. そして以下の python コードで数値計算を行う.

```
# method_A.py
# calculate the number pi
# [0] init
from decimal import *
getcontext().prec = 100
N = 50
digits = 50

# [1] calculate sequences a[n], A[n], S[n]
a = {}
A = {}
S = {}
a[0] = Decimal(1)
A[0] = a[0]
S[0] = Decimal(2) * A[0]

for n in range(1, N+1):
    a[n] = Decimal(n) / Decimal(2*n + 1) * a[n-1]
    A[n] = A[n-1] + a[n]
    S[n] = Decimal(2) * A[n]

# [2] print S[n]
print("n, S[n]")
for n in range(1, N+1):
    S_n = str(S[n])[:2 + digits]
    print(f"{n:0>2d}" + ", " + S_n)
```

出力を見ると, 確かに数列 S_n が $\pi = 3.14159265\dots$ に収束していることが確認できる.

手法 B

手法 B の正当性

系 2

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{2^1} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} \frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \frac{1}{2^4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \frac{1}{2^5} + \dots \right). \end{aligned}$$

[証明] 定理 2 で $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入し両辺に 6 を掛けてやると題意が得られる. $\square$

Python による実装

系 2 に基づくアルゴリズムを実装する. その際, 数列 A_n, a_n 及び S_n を $n \geq 0$ の範囲で

$$A_n = \sum_{k=0}^n \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}, \quad a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}, \quad S_n = \frac{3\sqrt{3}}{2} A_n$$

と定義する. そして以下の python コードで数値計算を行う.

```
# method_B.py
# calculate the number pi
# [0] init
from decimal import *
getcontext().prec = 100
N = 50
digits = 50

# [1] calculate sequences a[n], A[n], S[n]
a = {}
A = {}
S = {}
a[0] = Decimal(1)
A[0] = a[0]
S[0] = 3 * Decimal(3).sqrt() / 2 * A[0]

for n in range(1, N+1):
    a[n] = Decimal(n) / Decimal(2 * (2*n + 1)) * a[n-1]
    A[n] = A[n-1] + a[n]
    S[n] = 3 * Decimal(3).sqrt() / 2 * A[n]

# [2] print S[n]
print("n, S[n]")
for n in range(1, N+1):
    S_n = str(S[n])[:2 + digits]
    print(f"{n:0>2d}" + ", " + S_n)
```

出力を見ると, 確かに数列 S_n が $\pi = 3.14159265\dots$ に収束していることが確認できる. そして手法 B は手法 A に比べて収束が速い.

手法 C

手法 C の正当性

定理 3 $\arctan$ の加算

a, b, x 及び y が正の実数で $a \leq b$ かつ $x < y$ を満たすとき,

$$\arctan \frac{a}{b} + \arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{ay + bx}{by - ax}.$$

[証明] (Nelsen, 2021) を参考にして下さい. $\square$

定理 4 マチン型公式

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}.$$

[証明] (Eymard & Lafon, 2004) の 60 ページを参考にする. 定理 3 を繰り返し適用していくだけである. 証明を次の (a), (b), (c) 及び (d) から構成する.

(a) $\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$ を示す.

定理 3 より

$$2 \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{3}{4}.$$

上式の両辺に $\arctan \frac{1}{7}$ を足して、もう一度定理 3 を使うと

$$2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

が得られる.

(b) 定理 3 より

$$\arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{2}{11}$$

が得られる.

(c) 定理 3 より

$$\arctan \frac{2}{11} = \arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{3}{79}$$

が得られる.

(d) (a), (b)及び(c)の結果をまとめる.

まず(b)を(a)へ代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 2 \left(\arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{2}{11} \right) + \arctan \frac{1}{7} \\ &= 3 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{2}{11}. \end{aligned}$$

が得られる. そして上式へ(c)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 3 \arctan \frac{1}{7} + 2 \left(\arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{3}{79} \right) \\ &= 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79} \end{aligned}$$

となり題意が証明される. $\square$

系 3

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} (2.8 \times 0.02^n + 0.30336 \times 0.00144^n).$$

[証明] $x = \frac{1}{7}$ のとき $\frac{x^2}{1+x^2} = 0.02$ 及び $\frac{x}{1+x^2} = 0.14$ なので, 定理 2 より

$$\arctan \frac{1}{7} = 0.14 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times 0.02^n.$$

同様に $x = \frac{3}{79}$ のとき $\frac{x^2}{1+x^2} = 0.00144$ 及び $\frac{x}{1+x^2} = 0.03792$ なので, 定理 2 より

$$\arctan \frac{3}{79} = 0.03792 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times 0.00144^n.$$

すると

$$\begin{aligned}
5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79} &= 0.7 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times 0.02^n + 0.07584 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times 0.00144^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} (0.7 \times 0.02^n + 0.07584 \times 0.00144^n)
\end{aligned}$$

定理 4 より上式の左辺は $\pi/4$ に等しいので、両辺に4を掛けると題意が得られる。□

Python による実装

系 3 に基づくアルゴリズムを実装する. その際, 数列 a_n 及び S_n を $n \geq 0$ の範囲で

$$a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} (2.8 \times 0.02^k + 0.30336 \times 0.00144^k)$$

と定義する. そして以下の python コードで数値計算を行う.

```
# method_C.py
# calculate the number pi
# [0] init
from decimal import *
getcontext().prec = 100
N = 50
digits = 50

# [1] calculate sequences a[n], S[n]
a = {}
S = {}
a[0] = Decimal(1)
S[0] = a[0] * (Decimal("2.8") + Decimal("0.30336"))

for n in range(1, N+1):
    a[n] = (2 * n) / Decimal(2*n + 1) * a[n-1]
    S[n] = S[n-1] + a[n] * (Decimal("2.8") * Decimal("0.02")**n +
    Decimal("0.30336") * Decimal("0.00144")**n)

# [2] print S[n]
print("n, S[n]")
for n in range(1, N+1):
    S_n = str(S[n])[:2 + digits]
    print(f"{n:0>2d}" + ", " + S_n)
```

出力を見ると, 数列 S_n が円周率 $\pi = 3.14159265\dots$ に収束していることが確認できる. そして手法 C は手法 B に比べて収束が速いです. オイラーは手法 C を用いて僅か1時間の手計算で20桁まで計算したそうです. 数表を見る限り数列の第12項まで計算したと思われます.

参考文献

Eymard, P., & Lafon, J. (2004). The Number π . American Mathematical Society.

Mercer, P. (2023). A Compact Capstone Course in Classical Calculus. Springer Nature Switzerland.

Nelsen, R. (2021). Machin's Formula Via a Proof Without Words. The College Mathematics Journal, 52(5), 355. https://drive.google.com/file/d/1UU0znuh5tV6zVCkfyrLh8NW5NkQGi_mn/view?usp=share_link

$$n, S[n]$$
[illegible]

method_B.py の出力

n, S[n]

01, 3.03108891324553526367303109763527664214990919416816
02, 3.11769145362397912834940341471057026049704945685868
03, 3.13624914084793138506576891122670460728572237029236
04, 3.14037307134214299766940568823029001768320523994429
05, 3.14131032827264563689750495573110488368263316486519
06, 3.14152661833353086133475863284667754506711653215462
07, 3.14157708601440408037011782417364449939016265118882
08, 3.14158896076284483779020233977998966511323232625570
09, 3.14159177320326501717916972505517667804764356508732
10, 3.14159244283193648846225719773974501446059862195200
11, 3.14159260296053184029082159338170700795065309207181
12, 3.14159264139139472472967704833577788638826616490056
13, 3.14159265064326912283532743563953569045658042317415
14, 3.14159265287648018444703614981630481557651834758502
15, 3.14159265341677318322406245163326508778295494220055
16, 3.14159265354775330413970519146767969922693957119826
17, 3.14159265357956276207636128542746610486333583824056
18, 3.14159265358730019779068303801227901434245925454814
19, 3.14159265358918495777237679825729754357455342005897
20, 3.14159265358964465532888747148778986777750321652502
21, 3.14159265358975690705780286843942171438520025984813
22, 3.14159265358978434636931552102759838800041509266044
23, 3.14159265358979106024340904240555651026796765813579
24, 3.14159265358979270445747276192668911163961318437466
25, 3.14159265358979310745111583043677063158364395060967
26, 3.14159265358979320629861318686377175911708545930883
27, 3.14159265358979323056118071980494476314802110235316
28, 3.14159265358979323652040783315891707992754915503072
29, 3.14159265358979323798496364915268993744116198153622
30, 3.14159265358979323834510032521673244338713234870971
31, 3.14159265358979323843370538043883813929447426444286
32, 3.14159265358979323845551585557043338751781996677718
33, 3.14159265358979323846088709198343818745342002779981
34, 3.14159265358979323846221044008519299323465482544307
35, 3.14159265358979323846253661743421706508214227556641
36, 3.14159265358979323846261704472575724718152274272010
37, 3.14159265358979323846263688345767049209936992461802
38, 3.14159265358979323846264177872918155253364390456685
39, 3.14159265358979323846264298705569377631172419075676
40, 3.14159265358979323846264328540791901675075636018636
41, 3.14159265358979323846264335909732404601581852251536
42, 3.14159265358979323846264337730294175912836329203194
43, 3.14159265358979323846264338180203119397801516036075
44, 3.14159265358979323846264338291416566101950213904877
45, 3.14159265358979323846264338318914396330997968872437
46, 3.14159265358979323846264338325714934989794725477318
47, 3.14159265358979323846264338327397173500128660005894
48, 3.14159265358979323846264338327813397461448396384098
49, 3.14159265358979323846264338327916402381168937204967
50, 3.14159265358979323846264338327941898648426496814093

$$n, S[n]$$
[illegible]