加法定理の証明

2025 年 12 月 23 日(火)

はじめに

高校数学で以下の加法定理を学びます.

定理 加法定理
任意の実数α, βに対して、

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

が成立する.

本稿ではこの加法定理を 3 通りの方法で証明します.

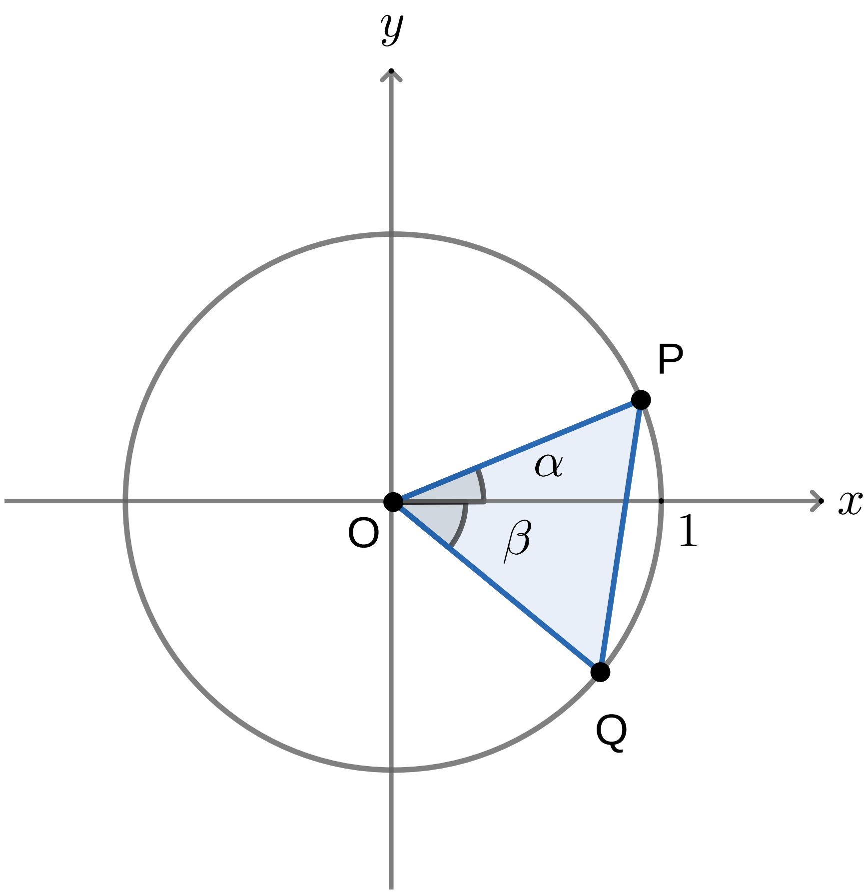
証明

証明 1

(プレックス製作委員会, 2019) の 188 ページを参考にする. 証明 1 は一番よく知られた方法で, 高校の授業で普通に取り上げられます.

[証明] 証明は次の(a)及び(b)から構成されている.

(a) コサインの加法定理を示す.



まず 3 角形OPQに対して余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}PQ^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cdot \cos(\alpha+\beta) \\ &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha+\beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha+\beta) \quad \text{式}(1)\end{aligned}$$

が成立する. 次に点P, Qの座標はそれぞれ $P = (\cos\alpha, \sin\alpha), Q = (\cos\beta, -\sin\beta)$ である. これに 2 点間距離の公式を用いると

$$\begin{aligned}PQ^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 \\ &= \left(\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta\right) + \left(\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta\right) \\ &= \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + \left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \quad \text{式}(2)\end{aligned}$$

式(1)及び式(2)を比較すると $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ が成立する.

(b) サインの加法定理を示す.
以下の通り余角公式とコサインの加法定理を使います.

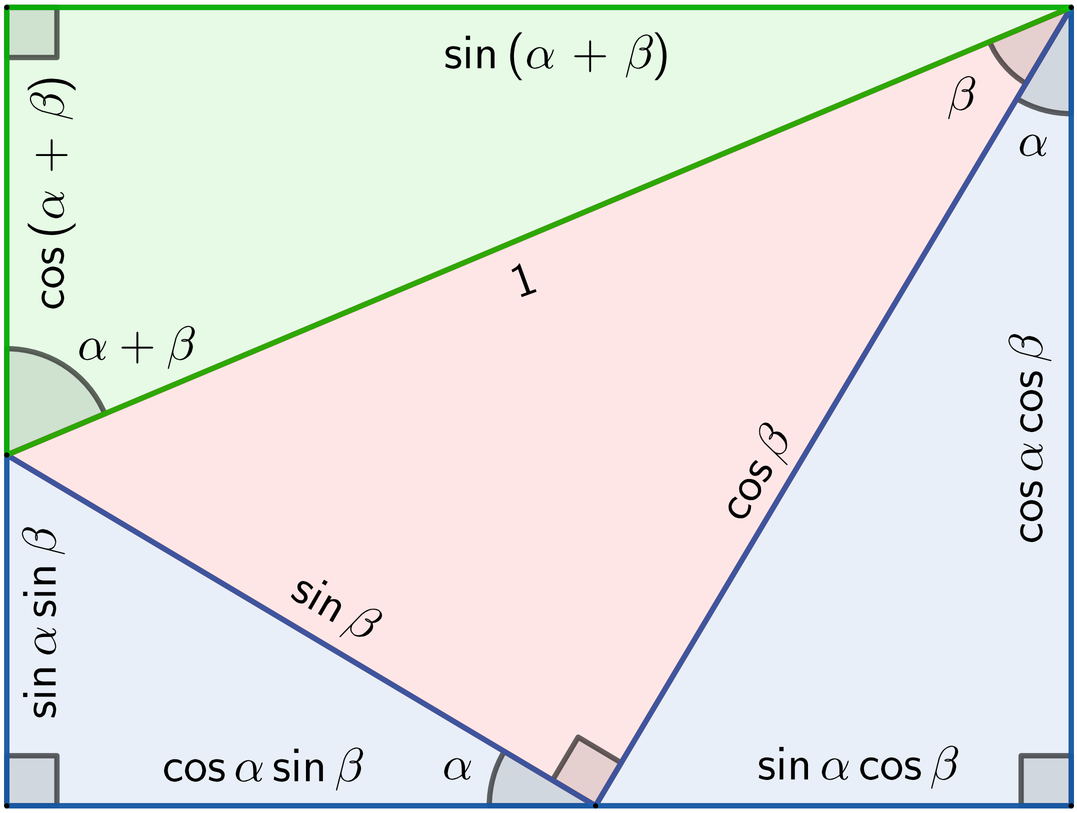
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) \quad \because \text{余角公式より} \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (-\beta)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta) \quad \because \text{コサインの加法定理より} \\ &= \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta) \quad \because \text{余角公式より} \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

よって題意は証明された. □

証明 2

(Alsina & Nelsen, 2020) の 134 ページを参考にする.

[証明] 下のイラストを見て下さい.

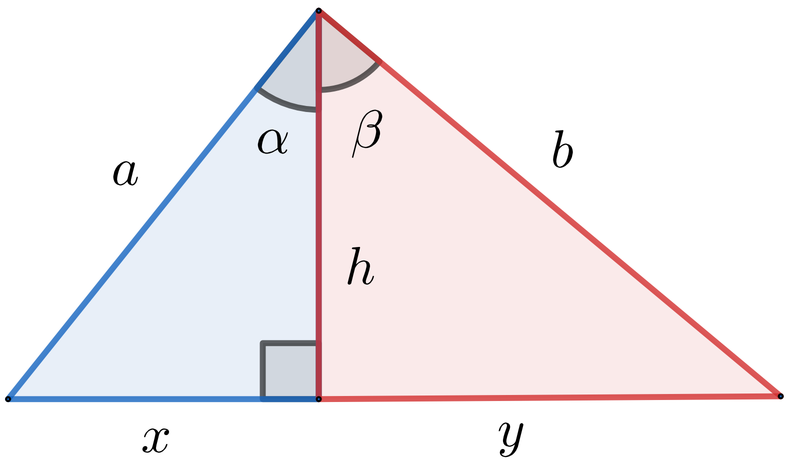


長方形の横幅をみるとサインの加法定理が成立している. 同様に長方形の縦幅をみるとコサインの加法定理が成立している. □

証明 3

(Nystedt, 2014), (Posamentier & Hauptman, 2006) の 192 ページ, (Nelsen, 2020) の 39 ページ, 及び(Brueningsen, 1993) を参考にする.

[証明] 証明は次の(a)及び(b)から構成されている.



(a) サインの加法定理を示す.
まず全体の三角形の面積は$\frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta)$である. 続いて青の三角形と赤の三角形の面積はそれぞれ$\frac{1}{2}xh, \frac{1}{2}yh$である. 全体の三角形は青三角形と赤三角形に分割できるので

$$\frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}xh+\frac{1}{2}yh$$

となる. 上式を$\sin(\alpha+\beta)$について整理してやると

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{x}{a}\cdot\frac{h}{b}+\frac{h}{a}\cdot\frac{y}{b}.$$

三角関数の定義より上式は $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ となる.

(b) コサインの加法定理を示す.
全体の三角形に余弦定理を用いると $(x+y)^2=a^2+b^2-2ab\cos(\alpha+\beta)$. この式を$\cos(\alpha+\beta)$について整理してやると

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{(a^2+b^2)-(x+y)^2}{2ab}=\frac{(a^2-x^2)+(b^2-y^2)-2xy}{2ab}.$$

この上式に青三角形と赤三角形に関するピタゴラスの定理を適用してやると,

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{h^2+h^2-2xy}{2ab}=\frac{h^2-xy}{ab}=\frac{h}{a}\cdot\frac{h}{b}-\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}$$

が成立する. 三角関数の定義より上式は $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ となる. よって題意は証明された. □

参考文献

Alsina, C., & Nelsen, R. (2020). A Cornucopia of Quadrilaterals. American Mathematical Society.

Brueningsen, C. (1993). Proof without Words. Mathematics Magazine, 66(2), 135.

Nelsen, R. (2020). Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking. Mathematical Association of America.

Nystedt, P. (2014). A Proof of the Cosine Addition Formula Using the Law of Cosines. Mathematics Magazine, 87(2), 144.

Posamentier, A., & Hauptman, H. (2006). 101+ Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics: A Resource for Secondary School Teachers. SAGE Publications.

プレックス製作委員会. (2019). プレックス数学重要公式・定理集 理系版数学 1・A・2・B・3. 河合出版.