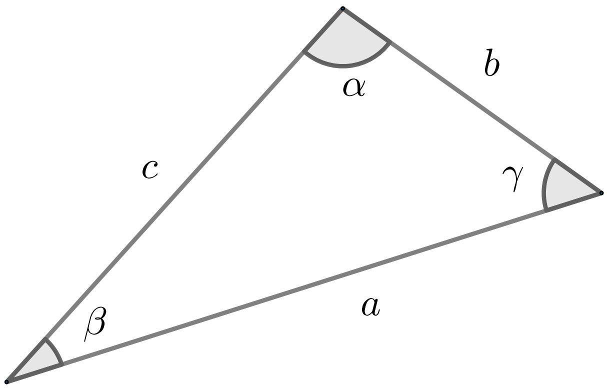
正弦定理と余弦定理は等価である.

2025 年 12 月 23 日(火)

はじめに

高校数学では三角形に関して以下の正弦定理と余弦定理を学びます.



定理 1 正弦定理 任意の三角形に対して

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

が成り立つ.

定理 2 余弦定理 任意の三角形に対して

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

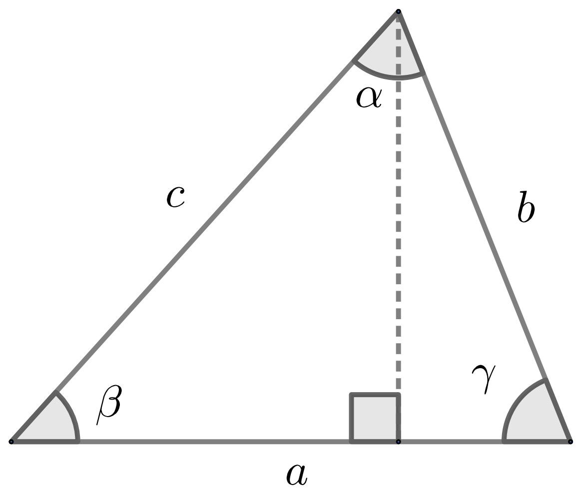
が成り立つ.

私は今までこの 2 つの定理はそれぞれ別で独立に存在すると思っていました. しかし信じられないことに正弦定理と余弦定理は等価なんです. 本稿ではこの 2 つの定理の等価性を議論します.

証明

(Bogomolny, 2018) を参考にする.

[証明]



まず$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$が成立する. これを 2 乗すると以下の様に式変形ができる.

$$
\begin{aligned}
a^2 &= (b\cos\gamma + c\cos\beta)^2 \\
&= b^2\cos^2\gamma + c^2\cos^2\beta + 2bc\cos\gamma\cos\beta \\
&= b^2(1-\sin^2\gamma) + c^2(1-\sin^2\beta) + 2bc\cos\gamma\cos\beta \\
&= b^2 + c^2 + 2bc\cos\gamma\cos\beta - (b^2\sin^2\gamma + c^2\sin^2\beta) \\
&= b^2 + c^2 + 2bc\cos\gamma\cos\beta - 2bc\sin\gamma\sin\beta - (b^2\sin^2\gamma - 2bc\sin\gamma\sin\beta + c^2\sin^2\beta) \\
&= b^2 + c^2 + 2bc(\cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta) - (b\sin\gamma - c\sin\beta)^2 \\
&= b^2 + c^2 + 2bc\cos(\gamma+\beta) - (b\sin\gamma - c\sin\beta)^2 \quad \because \text{コサインの加法定理より} \\
&= b^2 + c^2 + 2bc\cos(\pi-\alpha) - (b\sin\gamma - c\sin\beta)^2 \quad \because \pi = \alpha+\beta+\gamma\text{より} \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha - (b\sin\gamma - c\sin\beta)^2
\end{aligned}
$$

したがって

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha - (b\sin\gamma - c\sin\beta)^2 \quad \text{式}(1)$$

が得られる. 全く同様に$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$を 2 乗していくと

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta - (c\sin\alpha - a\sin\gamma)^2. \quad \text{式}(2)$$

今ここで余弦定理が成立すると仮定する. すると式(1)及び(2)は $b\sin\gamma = c\sin\beta$かつ $c\sin\alpha = a\sin\gamma$となり $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ が得られる. これは正弦定理を表している.

今度は逆に正弦定理が成立すると仮定する. すると$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$なので, 式(1)より $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$が得られる. これは余弦定理を表している. $\square$

参考文献

Bogomolny, A. (2018,). The Law of Cosines and the Law of Sines Are Equivalent. https://www.cut-the-knot.org/triangle/SineCosineLawsEquivalent.shtml