

級数のオイラー変換

2025 年 12 月 1 日(月)

主定理

3つの補題を証明した後に定理を証明する. (Penn, 2020) 及び(Knopp, 1990) の 244ページが参考文献である.

補題 1. パスカルの法則

m, n を $1 \leq m \leq n$ なる自然数とすると,

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$$

が成立する.

[証明] (Richmond & Richmond, 2023) の 153 ページを参考にして下さい. $\square$

定義. 差分演算子 Δ

実数列 $\{a_n\}$ に対して差分演算子 Δ を次のように定義する.

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}.$$

この差分演算子 Δ を n 回適用したときの第 k 項が次の補題 2 で求まる.

補題 2. n 次差分の一般項

$$\Delta^n a_k = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} a_{k+m}$$

[証明] n に関する数学的帰納法を用いる. $n = 0$ のとき

$$(\text{右辺}) = (-1)^0 \binom{0}{0} a_k = a_k = \Delta^0 a_k = (\text{左辺})$$

となり成立する. $n = t$ のとき成立すると仮定し, $n = t + 1$ のときを証明する.

$$\begin{aligned} \Delta^{t+1} a_k &= \Delta^t a_k - \Delta^t a_{k+1} \quad \because \text{差分演算子 } \Delta \text{ の定義より} \\ &= \sum_{m=0}^t (-1)^m \binom{t}{m} a_{k+m} - \sum_{m=0}^t (-1)^m \binom{t}{m} a_{k+m+1} \quad \because \text{帰納法の仮定より} \end{aligned}$$

上式の第 2 項 $\sum_{m=0}^t (-1)^m \binom{t}{m} a_{k+m+1}$ の m を 1 つずらすと $\sum_{m=1}^{t+1} (-1)^{m-1} \binom{t}{m-1} a_{k+m}$ になる
ので,

$$\Delta^{t+1} a_k = \sum_{m=0}^t (-1)^m \binom{t}{m} a_{k+m} - \sum_{m=1}^{t+1} (-1)^{m-1} \binom{t}{m-1} a_{k+m}.$$

ここから更に式を整理していくと, 次の様になる.

$$\begin{aligned}
\Delta^{t+1}a_k &= \sum_{m=0}^t (-1)^m \binom{t}{m} a_{k+m} + \sum_{m=1}^{t+1} (-1)^m \binom{t}{m-1} a_{k+m} \\
&= \left\{ a_k + \sum_{m=1}^t (-1)^m \binom{t}{m} a_{k+m} \right\} + \left\{ \sum_{m=1}^t (-1)^m \binom{t}{m-1} a_{k+m} + (-1)^{t+1} a_{k+t+1} \right\} \\
&= a_k + \sum_{m=1}^t (-1)^m \left\{ \binom{t}{m} + \binom{t}{m-1} \right\} a_{k+m} + (-1)^{t+1} a_{k+t+1} \\
&= a_k + \sum_{m=1}^t (-1)^m \binom{t+1}{m} a_{k+m} + (-1)^{t+1} a_{k+t+1} \quad \because \text{補題 1 より} \\
&= \sum_{m=0}^{t+1} (-1)^m \binom{t+1}{m} a_{k+m}
\end{aligned}$$

よって題意は証明された. $\square$

補題 3

任意の0以上の整数 m に対して,

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{m} = 2.$$

[証明] 左辺の級数を B_m とおく. 証明を次の(a),(b)及び(c)から構成する.

(a) 任意の m に対して級数 B_m が収束することを示す.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\text{第}(n+1)\text{項}}{\text{第}n\text{項}} \right| &= \left(\frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{m} \right) / \left(\frac{1}{2^n} \binom{n}{m} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \right) / \left(\frac{n!}{m!(n-m)!} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{n+1}{n-m+1} \\
&\rightarrow \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow \infty \text{のとき.}
\end{aligned}$$

よってダランベールの収束判定法により, 級数 B_m は収束する.

(b) $B_0 = 2$ を示す.

$$B_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

(c) 任意の m に対して, $B_{m+1} = B_m$ を示す.

$$\begin{aligned}
B_{m+1} &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{m+1} \quad \because \text{級数 } B_m \text{ の定義より} \\
&= \frac{1}{2^{m+1}} + \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{m+1} \\
&= \frac{1}{2^{m+1}} + \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left\{ \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1} \right\} \quad \because \text{補題 1 より} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2^m} + \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{m} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{m+1}
\end{aligned}$$

上式の $\sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{m}$ の n を 1 つずらすと, $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{m}$ になる. 同様に $\sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{m+1}$ の n を 1 つずらすと, $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{m+1}$ になる. 以上をまとめると

$$\begin{aligned}
B_{m+1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{m} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{m+1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{m} + \frac{1}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{m+1} \\
&= \frac{1}{2} B_m + \frac{1}{2} B_{m+1} \quad \because \text{級数 } B_m \text{ の定義より}
\end{aligned}$$

上式を整理すると $B_{m+1} = B_m$ が得られる. $\square$

以上で準備が整ったので次の定理を証明する.

定理. 級数の Euler 変換

次の級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots$$

が収束するとき, 以下の関係が成り立つ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}.$$

つまり右の級数が元の級数と同じ値に収束する.

[証明]

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} a_m \quad \because \text{補題 2 より} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2^{n+1}} (-1)^m \binom{n}{m} a_m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (-1)^m \binom{n}{m} a_m \quad \because \text{和の順序を交換} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_m \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{m} \right\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_m \cdot 1 \quad \because \text{補題 3 より} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = (\text{左辺})
\end{aligned}$$

よって題意は証明された. $\square$

応用例

2つの級数にオイラー変換を適用する. (Knopp, 1990) の 246 ページ及び(Euler, 1755) の 12 ページが参考文献である.

例 1

次のメルカトル級数

$$\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

にオイラー変換を適用する.

$$\begin{aligned}
0\text{次差分} : & 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \dots \\
1\text{次差分} : & \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad \frac{1}{4 \cdot 5}, \quad \frac{1}{5 \cdot 6}, \quad \frac{1}{6 \cdot 7}, \dots \\
2\text{次差分} : & \frac{1}{3} = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5}, \quad \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6}, \quad \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7}, \dots \\
3\text{次差分} : & \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \quad \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}, \quad \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}, \dots \\
4\text{次差分} : & \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \quad \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}, \quad \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}, \dots \\
5\text{次差分} : & \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}, \quad \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}, \dots \\
6\text{次差分} : & \frac{1}{7} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}, \dots
\end{aligned}$$

上記の様に具体的に計算すると, n 次差分の初項は $\frac{1}{n+1}$ となる. よって定理より

$$\log 2 = 1 \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5} \frac{1}{2^5} + \frac{1}{6} \frac{1}{2^6} + \frac{1}{7} \frac{1}{2^7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

が得られる。

例 2

次のライプニッツ級数

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \dots$$

にオイラー変換を適用する。

$$\begin{aligned} 0\text{次差分} : & 1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{11}, \quad \frac{1}{13}, \dots \\ 1\text{次差分} : & \frac{2}{1 \cdot 3}, \quad \frac{2}{3 \cdot 5}, \quad \frac{2}{5 \cdot 7}, \quad \frac{2}{7 \cdot 9}, \quad \frac{2}{9 \cdot 11}, \quad \frac{2}{11 \cdot 13}, \dots \\ 2\text{次差分} : & \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5}, \quad \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \quad \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 9}, \quad \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 9 \cdot 11}, \quad \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 11 \cdot 13}, \dots \\ 3\text{次差分} : & \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}, \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}, \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}, \dots \\ 4\text{次差分} : & \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}, \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}, \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}, \dots \\ 5\text{次差分} : & \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}, \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}, \dots \\ 6\text{次差分} : & \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}, \dots \end{aligned}$$

上記の様に具体的に計算すると、 n 次差分の初項は $2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ となる。よって定理より

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

上式の両辺に2を掛けてやると、

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots \end{aligned}$$

が得られる。これはオイラーによる級数である。

参考文献

Euler, L. (1755). On the transformation of series. <https://download.uni-mainz.de/mathematik/Algebraische%20Geometrie/Euler-Kreis%20Mainz/E212%20Kapitel%201RevisedVersion2.pdf>

Knopp, K. (1990). Theory and Application of Infinite Series. Dover Publications.

Penn, M. (2020,). The Euler transform of a series. <https://youtu.be/s873ihX7yuM?si=fDZ6JXVxpmOAaF8w>

Richmond, B., & Richmond, T. (2023). A Discrete Transition to Advanced Mathematics: Second Edition. American Mathematical Society.