京都アカデメイア第五回模擬授業

Young 図形で母函数入門 授業ノート

担当者：溝口佑爾*

2010 年 9 月 28 日（火）

目 次

* 人間・環境学研究科 吉田研究室 博士後期課程 1 回生 mailto: egofuisti@gmail.com

1　前置き

◆ Young 図形とは？母函数とは？　→ おいおい説明します

◆授業担当者の経歴：総合人間学部で数学専攻 → 人間環境学研究科で社会学専攻

◆今回の焦点:

for 理系 people： 簡単な具体例を通じた母函数の基本
for 文系 people： 数学における「視点の変更」

◆確認事項

その 1　授業 1 時間半 + 談笑（？）30 分
その 2　授業ノート編 + 資料編 + おまけ資料
その 3　数式を扱うのですから …
その 4　授業によっぽどついてこれないとき …

2　多項式・級数編: 多項式・級数の変形

（多項式・級数の変形続き）

3　数え上げ編 1: Young 図形の数え上げ

合同な正方形を, 上の行ほど個数が多くなるように敷き詰めた図形を Young 図形（ヤング図形 Young diagram, フェラーズ図形 Ferrers diagram とも）という. ただし, 上下に隣接する行同士の横方向の長さは同じでも構わない.

正方形の数 $n = 7$ のときの Young 図形

正方形が n 個あるときに可能な Young 図形の総数を $p(n)$ で表すことにする. 例えば, 上で見たように $n = 7$ のときには可能な Young 図形は 15 通りなので, $p(7) = 15$ となる.

資料 2-1 から

$$p(1) = 1,\ p(2) = 2,\ p(3) = 3,\ p(4) = 5,\ p(5) = 7,\ p(6) = 11,\ p(7) = 15$$

であることがわかる.

注 3-1)　$p(n)$ の p は partition(分割) の頭文字.
注 3-2)　今回は数列を $a(n)$ などとと表記している（e.g. Young 図形の総数を $p(n)$）が, これを高校の数列っぽく a_n と表記してもかまわない.
注 3-3)　Young 図形を黒板やノートに描くにあたっては次のように表記する.

4　数え上げ編 2: 制限された Young 図形

Young 図形に次の条件を課してみる.

条件 1　横方向の長さがすべて異なる

条件 2　横方向の長さがすべて奇数

正方形の数 $n = 7$ のときの, 条件 1・条件 2 それぞれの元での Young 図形

条件 1・条件 2 それぞれのもとで正方形が n 個あるときに可能な Young 図形の総数を $d(n),\ o(n)$ で表すことにする. 例えば, 上で見たように $n = 7$ のときには $d(7) = 5,\ o(7) = 5$ となる.

注 4-1)　$d(n)$ の d は different の頭文字, $o(n)$ の o は odd の頭文字.

5　Young 図形のわからないところ・わかるところ: Euler の恒等式

ここまでにみたように, $p(n)$ は簡単に定義できる.

では, $p(n)$ の一般項はどのようなものか? （$p(n)$ の値に規則性が見つけられるか？）

$p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7, p(6) = 11, p(7) = 15, \cdots$

$\rightarrow$

オイラー
Eulerの恒等式

$\rightarrow$

注 5-1)　Sylvester の精密化: おまけ資料 1 を参照

注 5-2)　一応, Young 図形の一般項を表す式を, おまけ資料 2 に記す.

6　母函数 1: 数え上げを級数へ

級数（多項式）と数列を結ぶヒント

7　母函数 2: Young 図形の母函数「を」考える

注 7-1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \cdots + a(N)$, $\displaystyle\prod_{n=1}^{N} a(n) = a(1) \cdot a(2) \cdot a(3) \cdots a(N)$.
それぞれ, sum と product の頭文字.

注 7-2) 今回は「関数」ではなく,「函数」と表記する. ここに中島さんが生きている.

注 7-3) 今回扱うのは, 通常型母函数 (ordinary generating function). 他には, 指数型母函数 (exponential generating function), ディリクレ級数 (Dirichlet series) などがある. 確率・統計の分野では積率母函数（モーメント母函数, moment-generating function）という指数型の母函数も.

注 7-4) $-1 < q < 1$ という条件が付くのに, 無限に続く数列 p_n すべてについて論じていいのか？
$\rightarrow$ いい. $-1 < q < 1$ を満たす q は無限個（$\aleph_1$）あるから.

注 7-5) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$ や $\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)$ は $-1 < q < 1$ でちゃんと収束するの？.
$\rightarrow$ 収束する. おまけ資料 3 を参照

8 母函数 3: 母函数「で」Euler の恒等式を考える

Euler の恒等式の成立を, 数え上げの次元ではなく, 母函数の次元から考えてみる.

$d(n)$ の母函数 $D(q)$ は, 次のようになる

$o(n)$ の母函数 $O(q)$ は次のようになる

$D(q) = O(q)$ を示す.

9　母函数 4: 母函数「から」考える

数え上げと多項式（級数）とでは枠組みが違う

→ (多項式の次元を足場にして遊んでみる．)

この変形は,「n 個の正方形を使って, 条件 1'・条件 2' のもとで可能な Young 図形の総数は同じになる．」ことを示している.

条件 1'

条件 2'

注 9)　おまけ資料 10 を参照.

参考)　拡張された Euler の恒等式

n 個の正方形を使って, 条件 I・条件 II のもとで可能な Young 図形の総数は同じになる.

条件 1'

条件 2'

10　まとめ

11　発展的話題

参考)　3 次元 Young 図形

P.A. MacMahon が開拓した分野．立方体の数が n 個のときに可能な 3 次元 Young 図形の総数 $pp(n)$ の母函数は次で与えられる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} pp(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^i)^i}.$$

Schur 函数などの表現論と接続し, 組み合わせ論と線形代数を結ぶ.

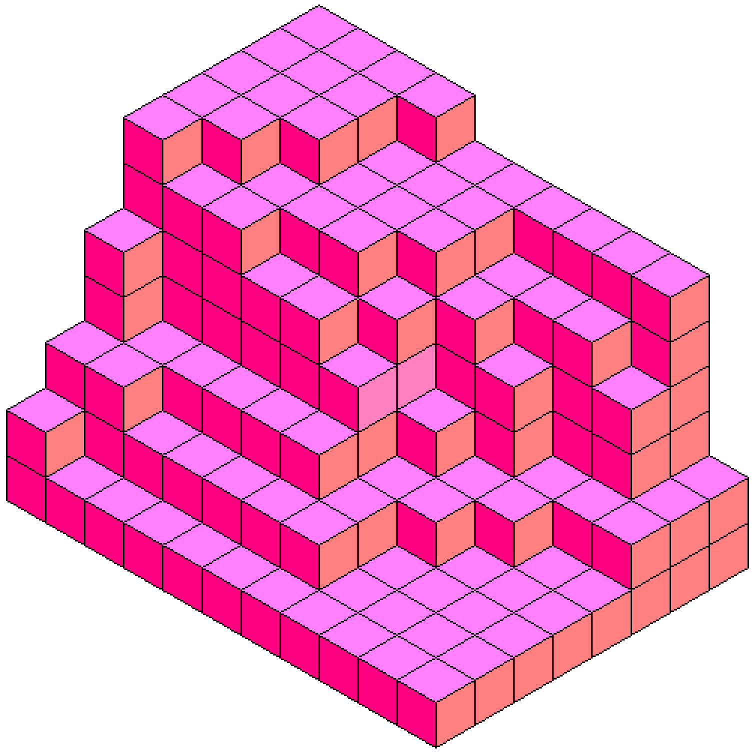

図 1: 3 次元 Young 図形の例

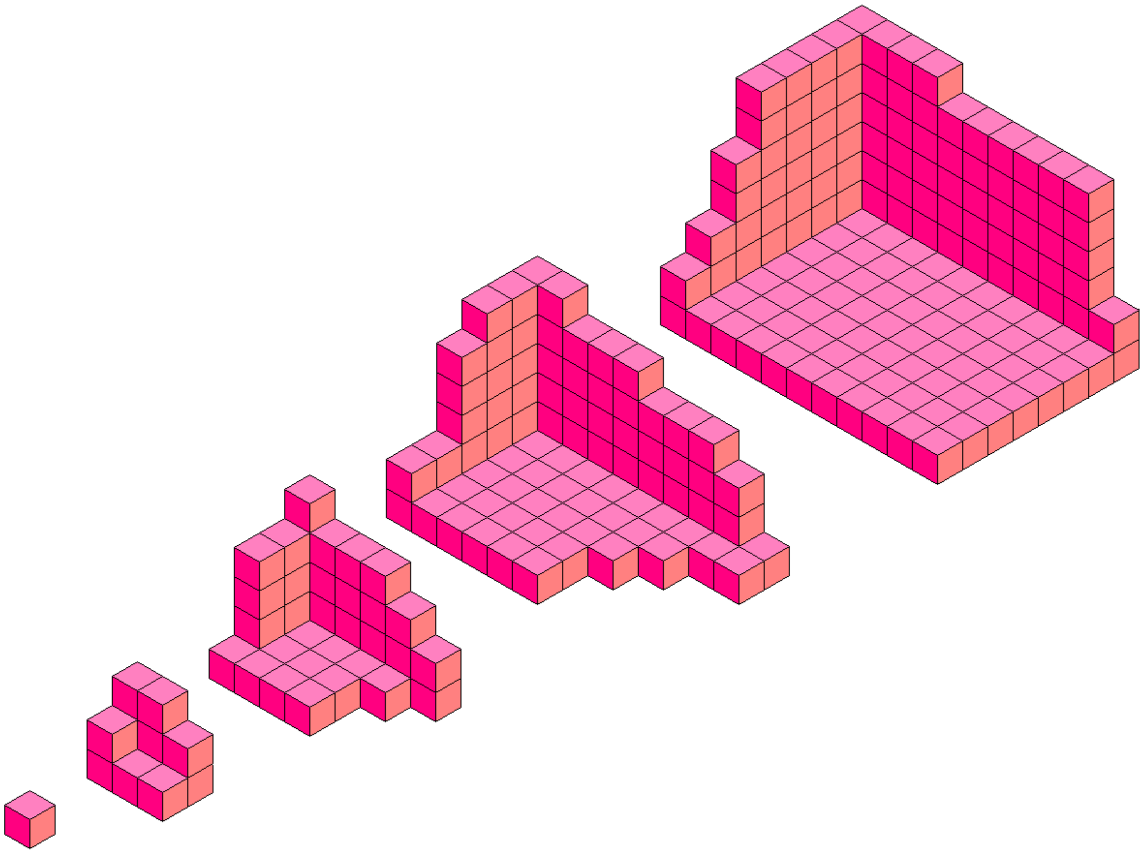

図 2: 図 1 を層別に取り出したもの