Young 図形で母函数入門　おまけ資料

2010 年 9 月 28 日（火）

目次

1　Sylvester の精密化

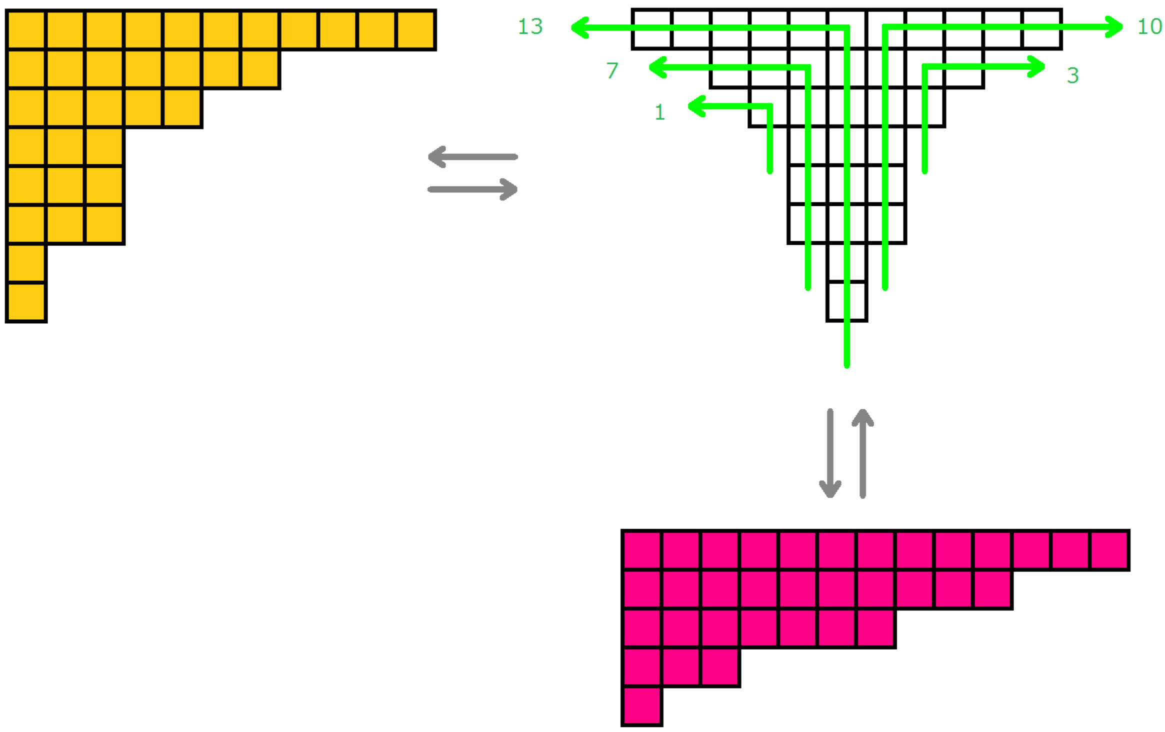

図 1: Sylvester の精密化: 条件 1 を満たす Young 図形と条件 2 を満たす Young 図形を 1 対 1 に対応付ける

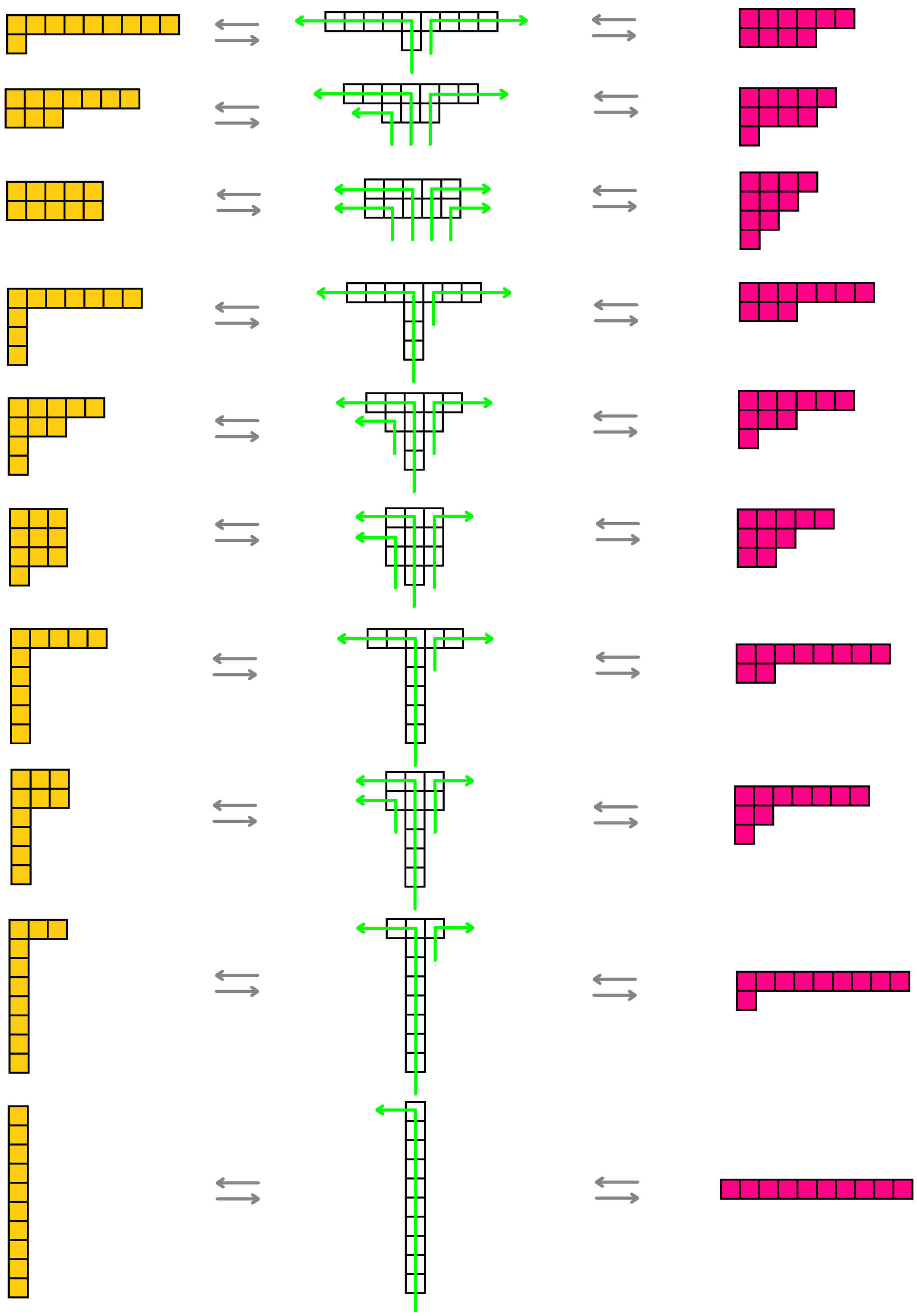

図 2: Sylvester の精密化の具体例: $n = 10$ の場合

2　(参考)　$p(n)$ の一般項

$p(n)$ の一般項 (Hardy-Ramanujan-Rademacher の公式)

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) k^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k} \left(\frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{24} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{\left(x - \frac{1}{24} \right)} \right]_{x=n}$$

ただし, $A_k(n)$ は 1 の 24 乗根の有限和.

このように, $p(n)$ の一般項はすさまじいことになる.

3　(参考)　$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$ の収束

$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$ が収束することを示す．($\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)$ についても同様にして示すことができる．)

$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ が $-1<q<1$ で収束すること (3-1) と, 収束した結果が 0 にならないこと (3-2) を示せば十分.

3-1: $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ は $-1<q<1$ で収束する

$-1<q<1$ であれば

$$0 < \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) < \prod_{n=1}^{N}(1+\mid q^n \mid)$$

なので, 次の 2 つのことを示せばよい.

(1) $-1<q<1$ において $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mid q^n \mid)$ が収束する.

(2) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mid q^n \mid)$ が収束するなら $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ も収束する.

(1) について

$\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(1+\mid q^n \mid)$ は単調増加列なので, $-1<q<1$ において $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(1+\mid q^n \mid)$ が有限な実数におさえられること（上に有界なこと）を示せばよい．それにはすべての実数 x に対して $1+x \leq \mathrm{e}^x$ であ

ることを利用する.

$$
\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{N}(1+\mid q^n \mid) &\leq \prod_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{|p^n|} \\
&= \mathrm{e}^{|q|}\cdot\mathrm{e}^{|q^2|}\cdot\mathrm{e}^{|q^3|}\cdot\mathrm{e}^{|q^4|}\cdot\mathrm{e}^{|q^5|}\cdots\mathrm{e}^{|q^N|} \\
&= \mathrm{e}^{|q|+|q^2|+|q^3|+|q^4|+|q^5|+\cdots+|q^N|} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{|q|-|q|^{N+1}}{1-|q|}} \\
&\leq \mathrm{e}^{\frac{|q|}{1-|q|}}
\end{aligned}
$$

以上から, $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(1+\mid q^n \mid)$ は $-1 < q < 1$ においてにおいて有限な実数 $\mathrm{e}^{\frac{|q|}{1-|q|}}$ におさえられる.

よって $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(1+\mid q^n \mid)$ は収束する.

(2) について

$F(N)=\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(1+\mid q^n \mid),\ f(N)=\prod_{n=1}^{N}(1-q^n)$ と置く. $N\to\infty$ で $F(N)$ が収束するなら $f(N)$ も収束することを示すには, 全ての整数 $m, n\ (m<n)$ について

$$
\mid f(n)-f(m)\mid \leq F(n)-F(m)
$$

であることを示せばよい.

全ての i について

$$
\begin{aligned}
\mid f(i+1)-f(i)\mid &= \mid (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)\cdots(1-q^i)(-q^{i+1})\mid \\
&= \mid (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)\cdots(1-q^i)\mid\cdot\mid q^{i+1}\mid \\
&\leq (1+\mid q\mid)(1+\mid q^2\mid)(1+\mid q^3\mid)(1+\mid q^4\mid)(1+\mid q^5\mid)\cdots(1+\mid q^i\mid)\ \mid q^{i+1}\mid \\
&= F(i+1)-F(i)
\end{aligned}
$$

であることから,

$$
\begin{aligned}
& \mid f(n)-f(m)\mid \\
=\ & \left|\ \Big(f(n)-f(n-1)\Big)+\Big(f(n-1)-f(n-2)\Big)+\Big(f(n-2)-f(n-3)\Big)+\cdots+\Big(f(m+1)-f(m)\Big)\ \right| \\
=\ & \mid f(n)-f(n-1)\mid+\mid f(n-1)-f(n-2)\mid+\mid f(n-2)-f(n-3)\mid+\cdots+\mid f(m+1)-f(m)\mid \\
\leq\ & \Big(F(n)-F(n-1)\Big)+\Big(F(n-1)-F(n-2)\Big)+\Big(F(n-2)-F(n-3)\Big)+\cdots+\Big(F(m+1)-F(m)\Big) \\
=\ & F(n)-F(m)
\end{aligned}
$$

となる.

3-2: $-1 < q < 1$ において $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ は 0 にはならない

まず

$$\prod_{n=1}^{N}(1-q^n) \geq \prod_{n=1}^{N}(1-\mid q^n \mid)$$

であるので, $-1 < q < 1$ において $\prod_{n=1}^{N}(1-\mid q^n \mid)$ よりも小さい正の数が存在する（下に有界である）ことを示せば十分. そのために, 不等式

$$(\spadesuit): \prod_{n=M}^{N}(1-\mid q^n \mid) \geq 1 - \sum_{n=M}^{N} \mid q^n \mid$$

を利用する.

($\spadesuit$) を示す

$0 < x, y < 1$ を満たす実数 x, y について

$$(1-x)(1-y) \quad = \quad 1-x-y+xy \geq 1-x-y$$

が成立する. これをすべての n について $0 < a(n) < 1$ を満たす数列 $a(n)$ について下記のように順に適用すれば

$$\begin{aligned}
& (1-a(M)\ )(1-a(M+1)\ )(1-a(M+2)\ )(1-a(M+3)\ )\cdots(1-a(N)\ ) \\
\geq\ & (1-a(M)-a(M+1)\ )(1-a(M+2)\ )(1-a(M+3)\ )\cdots(1-a(N)\ ) \\
\geq\ & (1-a(M)-a(M+1)-a(M+2)\ )(1-a(M+3)\ )\cdots(1-a(N)\ ) \\
\geq\ & (1-a(M)-a(M+1)-a(M+2)-a(M+3)\ )\cdots(1-a(N)\ ) \\
& \vdots \\
\geq\ & (1-a(M)-a(M+1)-a(M+2)-a(M+3)-\cdots-a(N-1)\ )(1-a(n)\ ) \\
\geq\ & 1-a(M)-a(M+1)-a(M+2)-a(M+3)-\cdots-a(N).
\end{aligned}$$

$-1 < q < 1$ であることから数列 $\mid q^n \mid$ はすべての n に対して $0 <\mid q^n \mid< 1$ を満たすので, 上式において $a(n) = q^n$ と置くことができる. 以上から

$$\begin{aligned}
\prod_{n=M}^{N}(1-\mid q^n) \mid \quad &= \quad (1-\mid q^M \mid)(1-\mid q^{M+1} \mid)(1-\mid q^{M+2} \mid)(1-\mid q^{M+3} \mid)\cdots(1-\mid q^N \mid) \\
&\geq \quad 1-\mid q^M \mid - \mid q^{M+1} \mid - \mid q^{M+2} \mid - \mid q^{M+3} \mid - \cdots - \mid q^N \mid \\
&= \quad 1 - \sum_{n=M}^{N} \mid q^n \mid .
\end{aligned}$$

証明の詳細

M が十分大きな整数 ($M > \frac{\log(1-|q|)-\log 2}{\log|q|}$ なら十分) であればどのような $N(> M)$ に関しても

$$\sum_{n=M}^{N} | q^n | = \frac{| q |^M - | q |^{N+1}}{1- | q |} < \frac{| q |^M}{1- | q |} < \frac{1}{2}$$

となるので, (♠) よりこの M に対しては

$$\prod_{n=M}^{N} (1- | q^n |) \geq 1 - \sum_{n=M}^{N} | q^n | > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

が成立する. 両辺に $\displaystyle\prod_{n=1}^{M-1} (1- | q^n |)(> 0)$ を掛ければ

$$\prod_{n=1}^{N} (1- | q^n |) > \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{M-1} (1- | q^n |)(> 0)$$

が得られる. これは部分積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{N} (1- | q^n |)$ が作る非増加列が正の数 $\displaystyle\frac{1}{2} \prod_{n=1}^{M-1} (1 - q^n)$ によっておさえられることを示している.

以上から, $-1 < q < 1$ を満たす全ての q に対して $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ より小さい正の数 $\displaystyle\frac{1}{2} \prod_{n=1}^{M-1} (1 - q^n)$ が存在することがわかる.

少し一般化

以上の結果を一般化すると, 次のようになる.

すべての n に対して $-1 < a(n) < 1$ のとき, $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} (\ 1 + a(n)\ )$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a(n)$ は同時に収束, または発散する.

4　簡単な数列の母函数いろいろ

◆定数列 $a(n) = 1$ の母函数

$$
\begin{aligned}
A(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n \\
&= a(0) + a(1)q + a(2)q^2 + a(3)q^3 + a(4)q^4 + a(5)q^5 + a(6)q^6 + a(7)q^7 + \cdots \\
&= 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + \cdots \\
&= \frac{1}{1-q}.
\end{aligned}
$$

◆等比数列 $a(n) = r^n$ の母函数

$$
\begin{aligned}
A(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n \\
&= a(0) + a(1)q + a(2)q^2 + a(3)q^3 + a(4)q^4 + a(5)q^5 + a(6)q^6 + a(7)q^7 + \cdots \\
&= 1 + rq + r^2q^2 + r^3q^3 + r^4q^4 + r^5q^5 + r^6q^6 + r^7q^7 + \cdots \\
&= \frac{1}{1-rq}.
\end{aligned}
$$

◆等差数列 $a(n) = n$ の母函数

$$
\begin{aligned}
A(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n \\
&= a(0) + a(1)q + a(2)q^2 + a(3)q^3 + a(4)q^4 + a(5)q^5 + a(6)q^6 + a(7)q^7 + \cdots \\
&= 0 + q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 5q^5 + 6q^6 + 7q^7 + \cdots \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\Bigl(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + \cdots\Bigr) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{1}{1-q}\right) \\
&= \frac{1}{(1-q)^2}.
\end{aligned}
$$

◆一般的な等差数列 $a(n) = b + cn$ の母函数

$$\begin{aligned} A(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (b + cn) q^n \\ &= b \sum_{n=0}^{\infty} q^n + c \sum_{n=0}^{\infty} n q^n \\ &= b \frac{1}{1-q} + c \frac{1}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

定数列 $a(n) = 1$ の母函数と等差数列 $a(n) = n$ の母函数を組み合わせた.

◆組み合わせの数 $a(n) = {}_N C_n$ の母函数

$$\begin{aligned} A(q) &= \sum_{n=0}^{N} a(n) q^n \\ &= a(0) + a(1)q + a(2)q^2 + a(3)q^3 + a(4)q^4 + a(5)q^5 + a(6)q^6 + a(7)q^7 + \cdots + a(N)q^N \\ &= 1 + {}_N C_1 q + {}_N C_2 q^2 + {}_N C_3 q^3 + {}_N C_4 q^4 + {}_N C_5 q^5 + {}_N C_6 q^6 + {}_N C_7 q^7 + \cdots + {}_N C_N q^N \\ &= {}_N C_0 q^0 + {}_N C_1 q^1 + {}_N C_2 q^2 + {}_N C_3 q^3 + {}_N C_4 q^4 + {}_N C_5 q^5 + {}_N C_6 q^6 + {}_N C_7 q^7 + \cdots + {}_N C_N q^N \\ &= (1+q)^N. \end{aligned}$$

最後の変形は二項定理を利用した.

注) 上記の式はいずれも, q の範囲を $A(q)$ が発散しないように限定する必要がある.

その他, 第二種スターリング数 (Stirling numbers of the second kind) やモンモール数 (Montmort number) などの（指数型）母函数とかもそれほど難しくないので, 興味があったらググってみてください.

5　母函数を使った遊び 1: 組み合わせの数の等式証明

(1) ${}_{N+1}C_n = {}_NC_n + {}_NC_{n-1}$ **を示す.**

$$
\begin{aligned}
{}_{N+1}C_n &= \Big((1+q)^{N+1}\text{の } q^n\text{の係数}\Big) \\
&= \Big((1+q)^N + q(1+q)^N\text{の } q^n\text{の係数}\Big) \\
&= \Big((1+q)^N\text{の } q^n\text{の係数}\Big) + \Big(q(1+q)^N\text{の } q^n\text{の係数}\Big) \\
&= \Big((1+q)^N\text{の } q^n\text{の係数}\Big) + \Big((1+q)^N\text{の } q^{n-1}\text{の係数}\Big) \\
&= {}_NC_n + {}_NC_{n-1}.
\end{aligned}
$$

要するに, 上式は恒等式 $(1+q)^{N+1} = (1+q)^N + q(1+q)^N$ において, 両辺の q^n の係数を比べたものとみることができるってこと.

(2) ${}_5C_5 + {}_6C_5 + {}_7C_5 + {}_8C_5 + {}_9C_5 + {}_{10}C_5 + \cdots + {}_nC_5 = {}_{n+1}C_6 \ (n > 5)$ **を示す.**

$$
\begin{aligned}
&{}_5C_5 + {}_6C_5 + {}_7C_5 + {}_8C_5 + \cdots + {}_nC_5 \\
=\ & \Big((1+q)^5\text{の } q^5\text{の係数}\Big) + \Big((1+q)^6\text{の } q^5\text{の係数}\Big) + \Big((1+q)^7\text{の } q^5\text{の係数}\Big) \\
& \qquad + \Big((1+q)^8\text{の } q^5\text{の係数}\Big) + \quad \cdots \quad + \Big((1+q)^n\text{の } q^5\text{の係数}\Big) \\
=\ & \Big((1+q)^5 + (1+q)^6 + (1+q)^7 + (1+q)^8 + \cdots + (1+q)^n \ \text{の } q^5\text{の係数}\Big) \\
=\ & \left(\frac{(1+q)^{n+1} - (1+q)^5}{(1+q)-1}\ \text{の } q^5\text{の係数}\right) \qquad (\because\text{等比数列の和の公式}) \\
=\ & \left(\frac{(1+q)^{n+1} - (1+q)^5}{q}\ \text{の } q^5\text{の係数}\right) \\
=\ & \Big((1+q)^{n+1} - (1+q)^5\ \text{の } q^6\text{の係数}\Big) \\
=\ & {}_{n+1}C_6 - 0 \\
=\ & {}_{n+1}C_6.
\end{aligned}
$$

要するに, 上式は $q \neq -1$ における恒等式

$$(1+q)^5 + (1+q)^6 + (1+q)^7 + (1+q)^8 + \cdots + (1+q)^n = \frac{(1+q)^{n+1} - (1+q)^5}{q}$$

において, 両辺の q^5 の係数を比べたものとみることができるってこと.

6　母函数をつかった遊び 2: 漸化式を解いてみる

(1)　三項間漸化式　$a(0)=1, a(1)=7, a(n+2)=8a(n+1)-15a(n)$ の一般項を求める．

$a(n)$ の母函数を $A(q)$ と置く．つまり，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = a(0)+a(1)q+a(2)q^2+a(3)q^3+\cdots = A(q)$.

与えられた漸化式

$$a(n+2)=8a(n+1)-15a(n)$$

の両辺に q^{n+2} (ただし $q\neq 0$) を掛けることで

$$a(n+2)q^{n+2} = 8q(a(n+1)q^{n+1}) - 15q^2(a(n)q^n)$$

が得られる．これを $n=0,1,2,3,\ldots$ の順に上から描きだして全て足して母函数に関する式を得る．

$$\begin{array}{rcl}
a(2)q^2 &=& 8q(a(1)q^1) - 15q^2(a(0)q^0) \\
a(3)q^3 &=& 8q(a(2)q^2) - 15q^2(a(1)q^1) \\
a(4)q^4 &=& 8q(a(3)q^3) - 15q^2(a(2)q^2) \\
a(5)q^5 &=& 8q(a(4)q^4) - 15q^2(a(3)q^3) \\
a(6)q^6 &=& 8q(a(5)q^5) - 15q^2(a(4)q^4) \\
a(7)q^7 &=& 8q(a(6)q^6) - 15q^2(a(5)q^5) \\
& \vdots & \\
\hline
A(q)-a(0)-a(1)q &=& 8q\Big(A(q)-a(0)\Big) - 15q^2A(q).
\end{array}$$

あとはこれを適切な範囲の q のもとで $A(q)$ について解く．

$$\begin{aligned}
& A(q)-a(0)-a(1)q = 8q\Big(A(q)-a(0)\Big) - 15q^2A(q) \\
\Leftrightarrow\quad & A(q)-1-7q = 8q\Big(A(q)-1\Big) - 15q^2A(q) \\
\Leftrightarrow\quad & (1-8q+15q^2)A(q) = 1+q \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) = \frac{1-q}{1-8q+15q^2} \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) = \frac{1-q}{(1-5q)(1-3q)} \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) = \frac{2}{1-5q} - \frac{1}{1-3q} \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) = 2(1+5q+(5q)^2+(5q)^3+(5q)^4+(5q)^5+\cdots) - (1+3q+(3q)^2+(3q)^3+(3q)^4+(3q)^5+\cdots) \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) = (2\cdot 1-1)+(2\cdot 5-3)q+(2\cdot 5^2-3^2)q^2+(2\cdot 5^3-3^3)q^3+(2\cdot 5^4-3^4)q^4+(2\cdot 5^5-3^5)q^5+\cdots \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(2\cdot 5^n - 3^n\Big)q^n.
\end{aligned}$$

ここで得られた $A(q)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(2\cdot 5^n-3^n\Big)q^n$ と，母函数の定義 $A(q)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a(n)q^n$ を比べると，一般項が $a(n)=2\cdot 5^n-3^n$ であることがわかる．

(2) もう少し簡単な漸化式 $a(0) = 3, a(n+1) = a(n) + 1$ の一般項を求める.

$a(n)$ の母函数を $A(q)$ と置く. つまり, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = a(0) + a(1)q + a(2)q^2 + a(3)q^3 + \cdots = A(q)$.

与えられた漸化式

$$a(n+1) = a(n) + 1$$

の両辺に q^{n+1} (ただし $q \neq 0$) を掛けることで

$$a(n+1)q^{n+1} = q(a(n)q^n) + q^n$$

が得られる. これを $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ の順に上から描きだして全て足すと, 母函数に関する式が得られる.

$$\begin{array}{rcl}
a(1)q^1 & = & q(a(0)q^0) + q^0 \\
a(2)q^2 & = & q(a(1)q^1) + q^1 \\
a(3)q^3 & = & q(a(2)q^2) + q^2 \\
a(4)q^4 & = & q(a(3)q^3) + q^3 \\
a(5)q^5 & = & q(a(4)q^4) + q^4 \\
a(6)q^6 & = & q(a(5)q^5) + q^5 \\
 & \vdots & \\
\hline
A(q) - a(0) & = & qA(q) + (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots).
\end{array}$$

あとはこれを適切な範囲の q のもとで $A(q)$ について解く.

$$\begin{aligned}
& A(q) - a(0) = qA(q) + (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots) \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) - 3 = qA(q) + \frac{1}{1-q} \\
\Leftrightarrow\quad & (1-q)A(q) = 3 + \frac{1}{1-q} \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) = \frac{3}{1-q} + \frac{1}{(1-q)^2} \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) = 3(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \cdots) + (0 + q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 5q^5 + \cdots) \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) = (3+0) + (3+1)q + (3+2)q^2 + (3+3)q^3 + (3+4)q^4 + (3+5)q^5 + \cdots \\
\Leftrightarrow\quad & A(q) = \sum_{n=0}^{\infty}(3+n)q^n.
\end{aligned}$$

ここで得られた $A(q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3+n)q^n$ と, 母函数の定義 $A(q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ を比べると, 一般項が $a(n) = 3 + n$ であることがわかる.

7　母函数をつかった遊び 3: おまけ

そういえば, 予備校で働いているときに使った高校生向けのテキストでこんな問題↓があったけど

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

であることを数学的帰納法で示せ♪

これは母函数を使って考えれば,

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{(1-q)^2} \cdot \dfrac{1}{(1-q)^2} & = & \dfrac{1}{(1-q)^4} \\ \| & & \| \\ (1+2q+3q^2+4q^3+5q^4+\cdots) \cdot (1+2q+3q^2+4q^3+5q^4+\cdots) & & ({}_3C_3 + {}_4C_3 q + {}_5C_3 q^2 + {}_6C_3 q^3 + \cdots) \end{array}$$

という恒等式において両辺の q^{n-1} の係数を比べたものに過ぎないことがわかる.

このことがわかれば, 似たような問題をいくらでも作れる. 例えば, $\dfrac{1}{(1-q)^3} \cdot \dfrac{1}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{(1-q)^5}$ の q^n の係数を比べる, など.

$A(q) = \dfrac{1}{(1-q)^4}$ が $a(n) = {}_{n+3}C_3$ の母函数であることは, 次の 8「母函数を使った遊び 4」で確かめる.

8 (参考) 母函数を使った遊び 4: 負の二項定理と重複組み合わせ

等比級数の式を微分していくと

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-q} &= 1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+\cdots \\
1\cdot\frac{1}{(1-q)^2} &= 1+2q+3q^2+4q^3+5q^4+6q^5+\cdots \\
2\cdot 1\cdot\frac{1}{(1-q)^3} &= 2\cdot 1+3\cdot 2\cdot q+4\cdot 3\cdot q^2+5\cdot 4\cdot q^3+6\cdot 5\cdot q^4+7\cdot 6\cdot q^5+\cdots \\
3\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{(1-q)^3} &= 3\cdot 2\cdot 1+4\cdot 3\cdot 2\cdot q+5\cdot 4\cdot 3\cdot q^2+6\cdot 5\cdot 4\cdot q^3+7\cdot 6\cdot 5\cdot q^4+8\cdot 7\cdot 6\cdot q^5+\cdots \\
\Leftrightarrow \frac{1}{(1-q)^4} &= \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1}+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1}\,q+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}\,q^2+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\,q^3+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\,q^4+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\,q^5+\cdots \\
&= {}_3C_0+{}_4C_1\ q+{}_5C_2\ q^2+{}_6C_3\ q^3+{}_7C_4\ q^4+{}_8C_5\ q^5+{}_9C_6\ q^6+\cdots.
\end{aligned}
$$

これを一般化すると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-q)^n} &= {}_{n-1}C_0+{}_nC_1\ q+{}_{n+1}C_2\ q^2+{}_{n+2}C_3\ q^3+{}_{n+3}C_4\ q^4+{}_{n+4}C_5\ q^5+{}_{n+5}C_6\ q^6+\cdots \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} {}_{n+m-1}C_m\ q^m
\end{aligned}
$$

となる. これは負の値について拡張した二項定理になっている.

ちなみに, 重複組み合わせの数

$$
{}_nH_m = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}(= {}_{n+m-1}C_m)
$$

というのが高校数学の片隅にあったのだけれど（リンゴを配ったりするやつ）, これを思い出せば上の式は次のように書き換えられる.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-q)^n} &= {}_{n-1}C_0+{}_nC_1\ q+{}_{n+1}C_2\ q^2+{}_{n+2}C_3\ q^3+{}_{n+3}C_4\ q^4+{}_{n+4}C_5\ q^5+{}_{n+5}C_6\ q^6+\cdots \\
&= {}_nH_0+{}_nH_1\ q+{}_nH_2\ q^2+{}_nH_3\ q^3+{}_nH_4\ q^4+{}_nH_5\ q^5+{}_nH_6\ q^6+\cdots. \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} {}_nH_m\ q^m
\end{aligned}
$$

つまり, $(1-q)^{-n}$ は重複組み合わせの数 ${}_nH_m$ の母函数になっている.

この重複組み合わせの数 ${}_M H_m$ の母函数と組み合わせの数 ${}_N C_n$ の母函数とを比べてみると, 両者に対称性があることがわかる.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} {}_N C_n\ q^n &= (1+q)^N \\ \sum_{n=0}^{\infty} {}_M H_m\ q^m &= (1-q)^{-M}\end{aligned}$$

このことから, 重複組み合わせの数 ${}_M H_m$ は, 二項係数（組み合わせの数）${}_N H_n$ の N を負の値にしたものと考えることもできる.

$${}_N H_n = (-1)^n {}_{(-N)} C_n.$$

もうちょっと遊んでみる. 6「母函数を使った遊び 2」で扱った問題「${}_5 C_5 + {}_6 C_5 + {}_7 C_5 + {}_8 C_5 + {}_9 C_5 + {}_{10} C_5 + \cdots + {}_n C_5 = {}_{n+1} C_6\ (n > 5)$ を示せ」を重複組み合わせの母函数を用いて解くこともできる.

$$\begin{aligned}& {}_5 C_5 + {}_6 C_5 + {}_7 C_5 + {}_8 C_5 + \cdots + {}_n C_5 \\ = \ & {}_5 C_0 + {}_6 C_1 + {}_7 C_2 + {}_8 C_3 + \cdots + {}_n C_{n-5} \\ = \ & {}_6 H_0 + {}_6 C_1 + {}_6 C_2 + {}_6 C_3 + \cdots + {}_6 C_{n-5} \\ = \ & \sum_{i=0}^{n-5} \Big(\frac{1}{(1-q)^6} \text{の } q^i \text{の係数} \Big) \\ = \ & \Big(\frac{1}{(1-q)^6} \cdot \frac{1}{1-q} \text{の } q^{n-5} \text{の係数} \Big) \\ = \ & \Big(\frac{1}{(1-q)^7} \text{の } q^{n-5} \text{の係数} \Big) \\ = \ & {}_7 H_{n-5} \\ = \ & {}_{n+1} C_{n-5} \\ = \ & {}_{n+1} C_6.\end{aligned}$$

9　$d(n), o(n)$ の母函数の確かめ

$D(q) = \displaystyle\prod_{i=1}^{\infty}(1+q^i)$ が $d(n)$ の母函数となっていることを, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ について確認する.

$D(q)$ の q^7 以降の項を無視すると

$$\begin{aligned}
&(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)(1+q^6)\\
&\quad = 1+q+q^2+2q^3+2q^4+3q^5+4q^6+4q^7+4q^8+5q^9+5q^{10}\\
&\qquad +5q^{11}+5q^{12}+4q^{13}+4q^{14}+4q^{15}+3q^{16}+2q^{17}+2q^{18}+q^{19}+q^{20}+q^{21}.
\end{aligned}$$

$q, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6$ の係数がそれぞれ $1, 1, 2, 2, 3, 4$ となっているので, $d(1) = 1, d(2) = 1, d(3) = 2, d(4) = 2, d(5) = 3, d(6) = 4$ であることと一致する.（q^7 以降の項をすべて無視しているので, 当然, $d(7)$ 以降に関しては値がズレる.）

$O(q) = \displaystyle\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2i-1}}$ が $o(n)$ の母函数となっていることを, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ について確認する.

$O(q)$ の q^7 以降の項を無視すると

$$\begin{aligned}
&(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6)(1+q^3+q^6)(1+q^5)\\
&\quad = 1+q+q^2+2q^3+2q^4+3q^5+4q^6+3q^7+4q^8+4q^9+3q^{10}\\
&\qquad +4q^{11}+3q^{12}+2q^{13}+2q^{14}+q^{15}+q^{16}+q^{17}.
\end{aligned}$$

$q, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6$ の係数がそれぞれ $1, 1, 2, 2, 3, 4$ となっているので, $o(1) = 1, o(2) = 1, o(3) = 2, o(4) = 2, o(5) = 3, o(6) = 4$ と一致する.（q^7 以降の項をすべて無視しているので, 当然, $d(7)$ 以降に関しては値がズレる.）

10　条件 1'・条件 2' を満たす Young 図形の描き出し

図 3: ピンクが条件 1'「横方向に同じ長さを 3 回以上使ってはいけない」のもとでの数え上げ.
黄色が条件 2'「横方向の長さが 3 の倍数になってはいけない」のもとでの数え上げ.