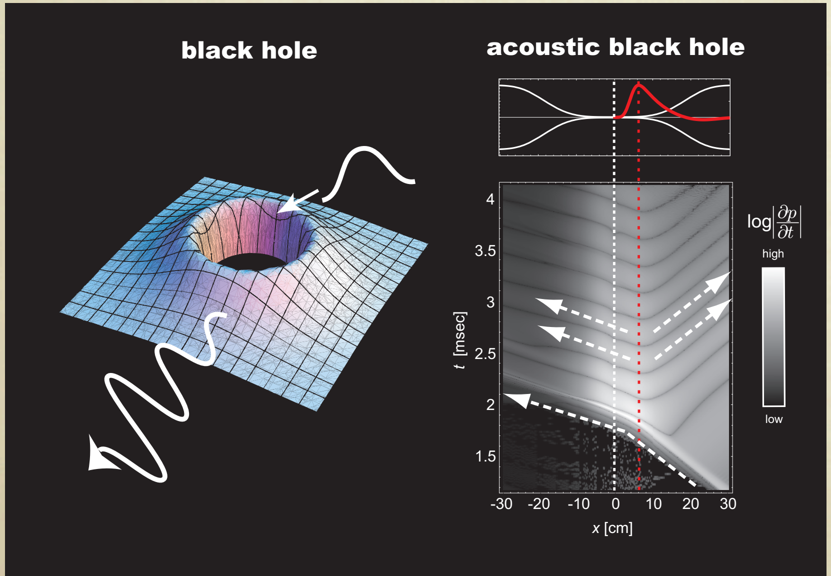
桁見積もり(フェルミ推定)実習

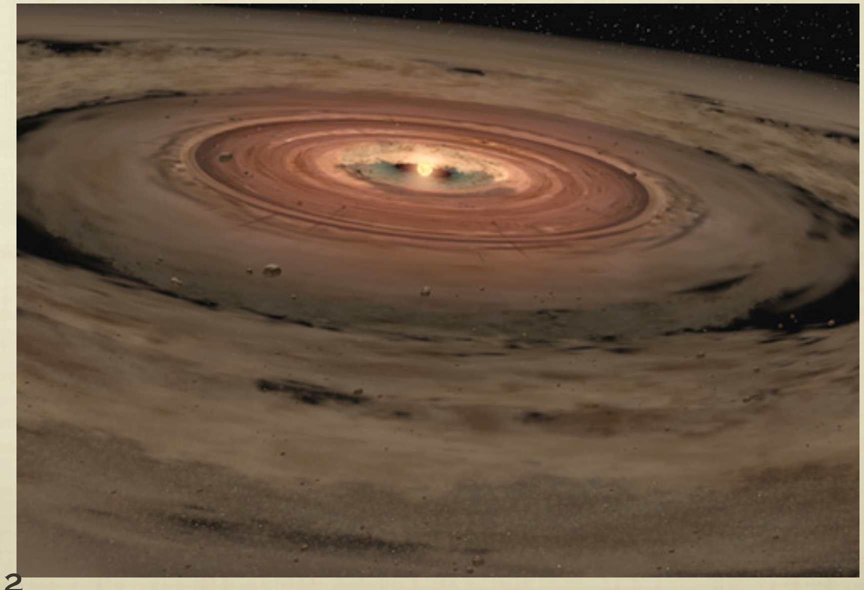
名古屋大学理学研究科
奥住　聡

自己紹介

- 2001年 4月　京都大学総合人間学部入学　(百木と同期)
- 2010年 3月　人間・環境学研究科　博士課程修了
- 2010年 4月より、名古屋大学理学研究科　学振研究員

専門：理論宇宙物理学／惑星科学　(特に惑星形成理論)





目次

- **「“桁見積もり”とは何か？」**

  手持ちのデータと、なるべく少ない仮定を使って、

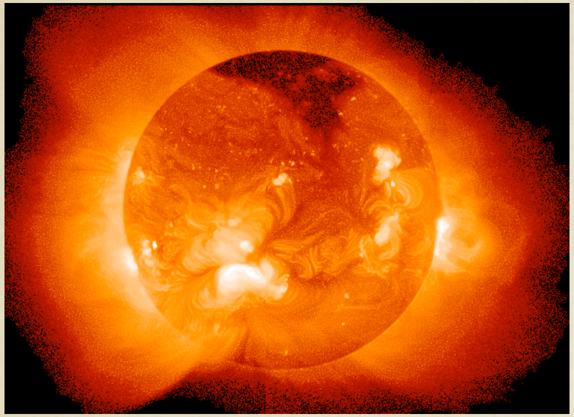
  知りたいものの量を見積もること。

- 応用：太陽系の固体天体の重さと形

  万有引力の法則と、地上で測った「ものの硬さ」

  だけから、天体の大きさと形の関係を見事に示してみる。

宇宙の桁 vs 人間の桁



質量 M ≒ 2×10^{30} kg

半径 R ≒ 7×10^{8} m

発熱量 L ≒ 4×10^{26} W

温度 T ≒ 6×10^{3} K

質量 M ≒ 50 kg

長さ R ≒ 1 m

発熱量 L ≒ 100 W

温度 T ≒ 300 K

問題「発熱効率(質量あたりの発熱量)が大きいのはどちらか？」

発熱効率 L/M ≒ 2×10^{-4} W/kg

発熱効率 L/M ≒ 2 W/kg

“桁見積もり”とは何か？

桁見積もり(order-of-magnitude estimate)とは、

知りたい“量” (数, 長さ, 重さ, ...)を、

厳密な数値や難しい計算を用いずに 、

せめて**桁だけでも**て見積もること。

必要なのは次の３つだけ！

■なるべく手持ちの**データ**

■なるべくシンプルな理屈（物理法則、経済法則、etc.）

■**簡単な計算**（ほぼ＋ー×÷、有効数字０〜１**桁！**）

たとえばこういう問題。

シカゴにはピアノの調律師は何人いるか？

有名な物理学者エンリコ・フェルミ(E.Fermi,1901-54)が大学で学生に出題したと言い伝えられている。

フェルミ推定(Fermi estimate)

とも言う。

桁見積もりの基本中の基本

- ✴ 無理して精度（有効桁数）の高い計算はしなくてよい！
  - “1≒3(≒π)”, “1≠10” **(有効数字0桁)** でもよい。
  - **「私の体重は100kgである」**
- ✴ 複雑なものはより簡単なもので代用(近似)しろ！
  - 複雑な形状 → 球、箱、棒
  - **「私は長さ2m、太さ10cmの円筒である」**
- ✴ 見積もり結果の精度を常に把握しろ！
  - 採用した値や近似の精度以上の結果は出てこない。
  - 低い精度なりに結果を**よく味わうこと**が大事。

[理系向け]

✴ 微分 dy(x)/dx は 割り算 y/x、 積分 $\int$y(x)dx はかけ算 yx

“桁見積もり”を実際にやってみよう。

問題1-1

琵琶湖の水の体積は

だいたい何m³か？

桁だけ見積もってみよう。

- 横幅 ≒ [ ]
- 縦幅 ≒ [ ]
- 深さ ≒ [ ]

➔ 体積 ≒ [ ]

“桁見積もり”を実際にやってみよう。

問題1-1

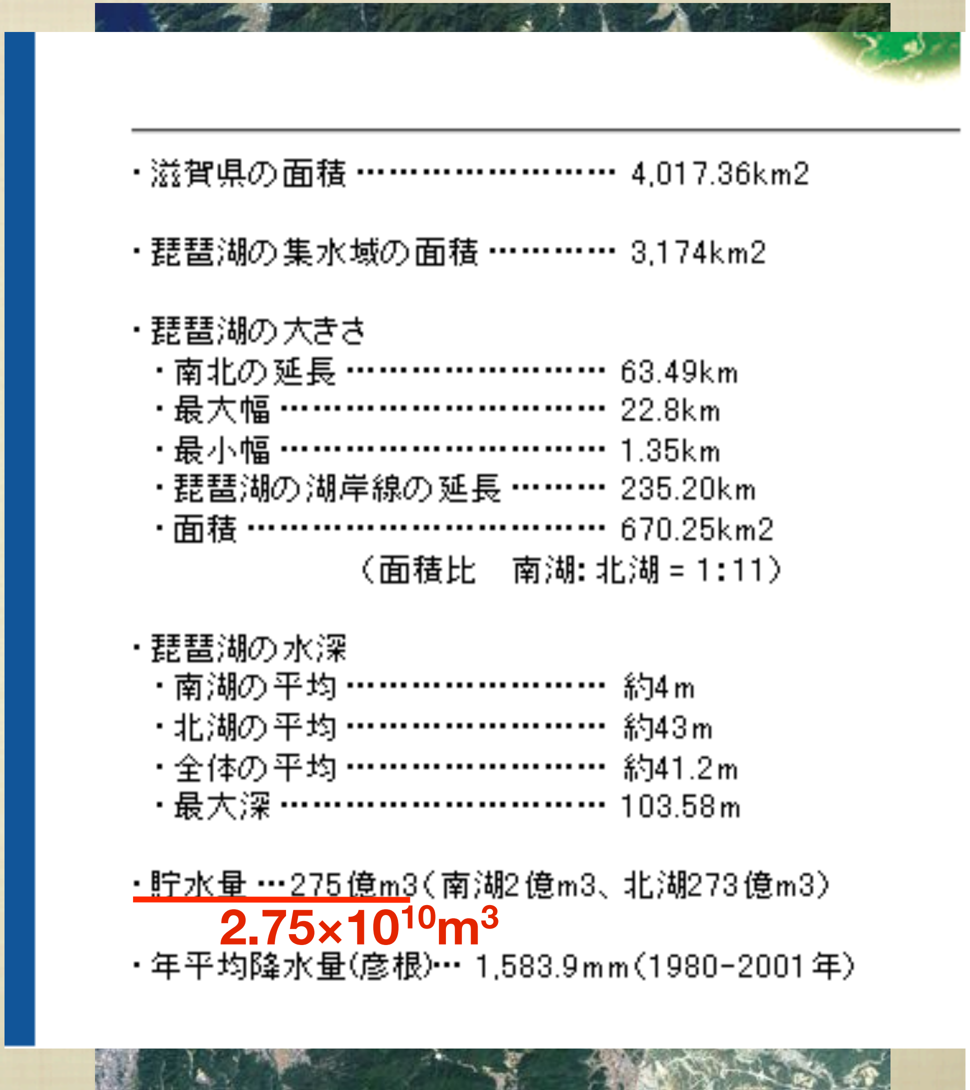
琵琶湖の水の体積は

だいたい何m^3か？

桁だけ見積もってみよう。

- 横幅 ≒ $10\,km = 10^4 m$
- 縦幅 ≒ $10\,km = 10^4 m$
- 深さ ≒ $100 m = 10^2 m$

➔ 体積 ≒ $10^{10} m^3$



・滋賀県の面積 ………………………… 4,017.36km2

・琵琶湖の集水域の面積 ………… 3,174km2

・琵琶湖の大きさ
- ・南北の延長 ……………………………… 63.49km
- ・最大幅 ……………………………………… 22.8km
- ・最小幅 ……………………………………… 1.35km
- ・琵琶湖の湖岸線の延長 ……… 235.20km
- ・面積 ………………………………………… 670.25km2

（面積比　南湖：北湖 = 1:11）

・琵琶湖の水深
- ・南湖の平均 ……………………………… 約4m
- ・北湖の平均 ……………………………… 約43m
- ・全体の平均 ……………………………… 約41.2m
- ・最大深 ……………………………………… 103.58m

・貯水量 …275億m3（南湖2億m3、北湖273億m3）

$2.75 \times 10^{10} m^3$

・年平均降水量(彦根)… 1,583.9mm(1980-2001年)

“桁見積もり”を実際にやってみよう。

問題1-2

関西の住民が琵琶湖の水を使い果たしてしまうのには何日/何か月/何年かかる？

- 貯水量 ≒ 10^{10} m³
- 関西人口 ≒
- 1人・1日当たりの水消費量 ≒

➔ 消費日数 ≒

“桁見積もり”を実際にやってみよう。

問題1-2

関西の住民が琵琶湖の水を

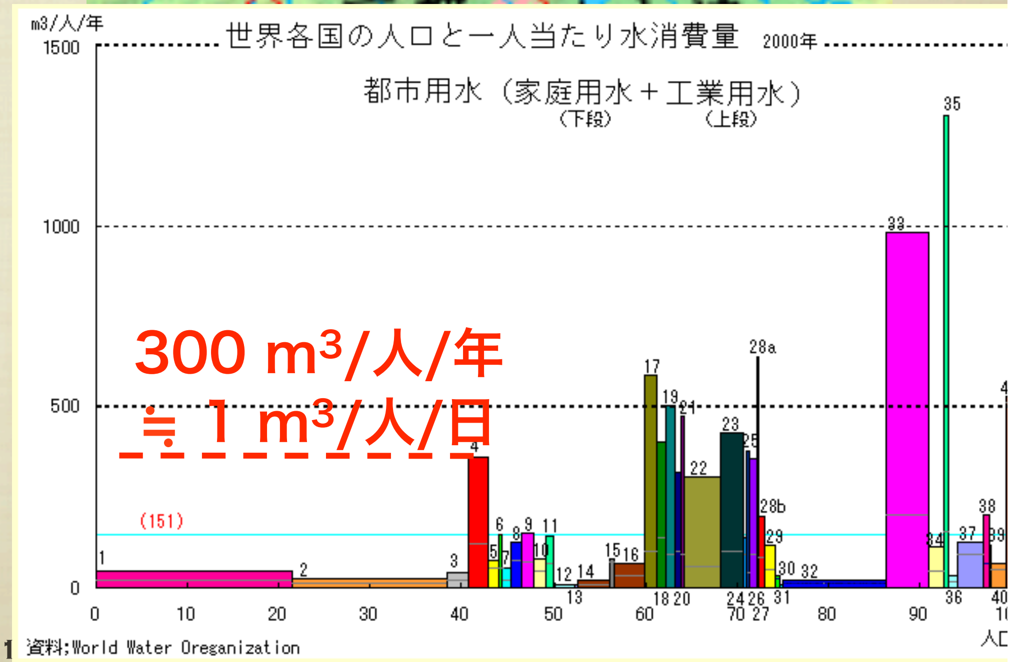
使い果たしてしまうのには

何日/何か月/何年かかる？

近畿地方のデータ	
（三重県を除いた）2府4県の合計	
面積	27,335.11 km²
総人口	20,922,282人 （2005年3月31日）
人口密度	765.40人/km² （2005年3月31日）

- 貯水量 ≒ 10^{10} m^3
- 関西人口 ≒ 1千万人 = 10^7人
- １人・１日当たりの水消費量 ≒ 1m^3

➔ 消費日数 ≒ 10^3日≒数年



“桁見積もり”を実際にやってみよう。

こんな見積もりで一体、何がわかるのか？？

問題1-3　東京の水資源は何日で干上がるか？

<u>東京の貯水池（利根川水系）</u>

- 東京人口 ≒ 1 千万人(≒10^7人)

（↑関西人口とケタは同じ）

- 貯水量 ≒ 10^8 m^3

（↑**琵琶湖より２ケタも小さい!!**）

➔ 消費日数 ≒ 10 日

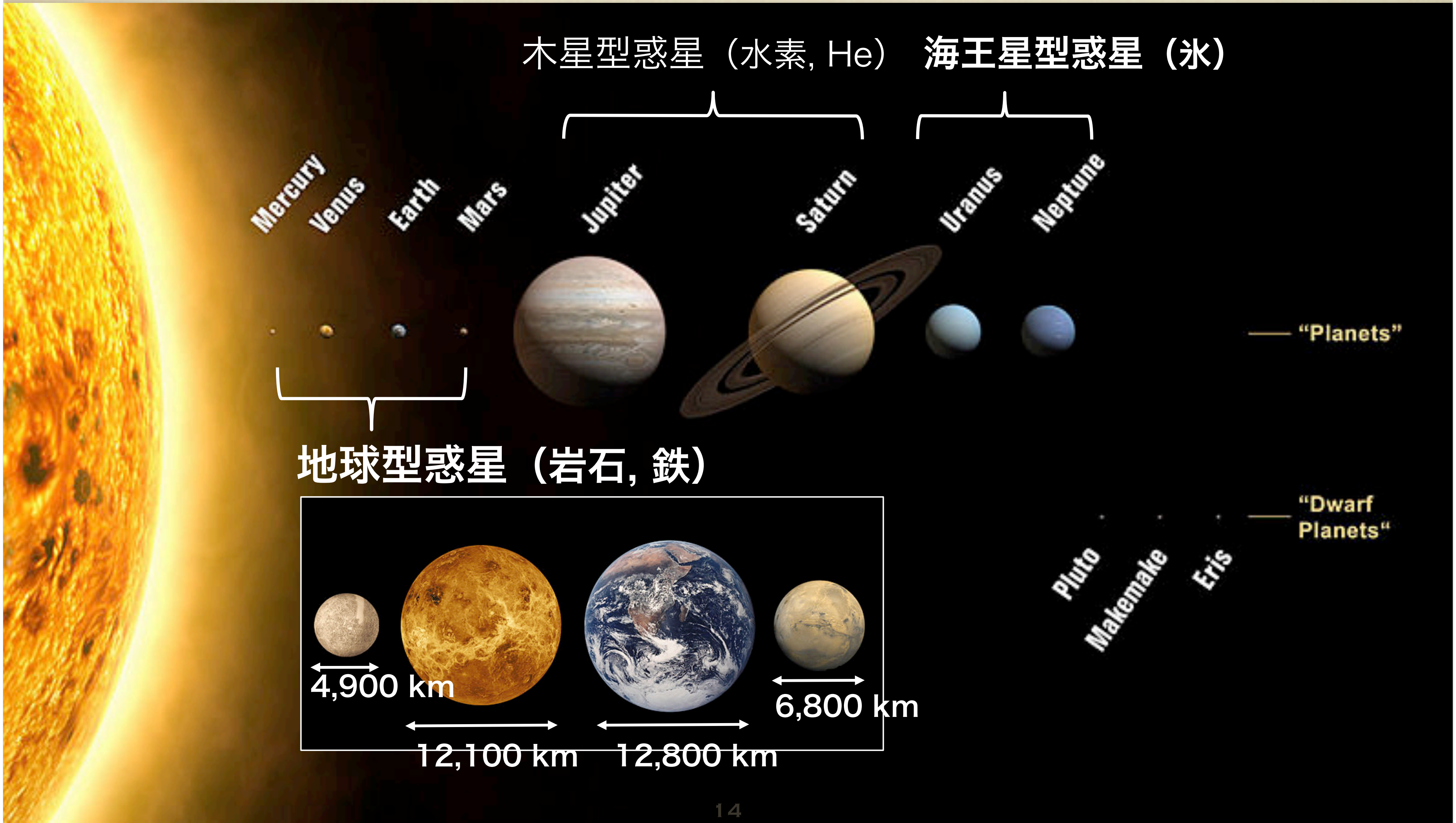
もし、何十日も雨が降らなかったら、
東京の貯水池は干上がってしまう！

もう少し難しい問題

問題２
カラオケボックスは
日本に何店舗あるか？
（フェルミ問題の“現代版”）

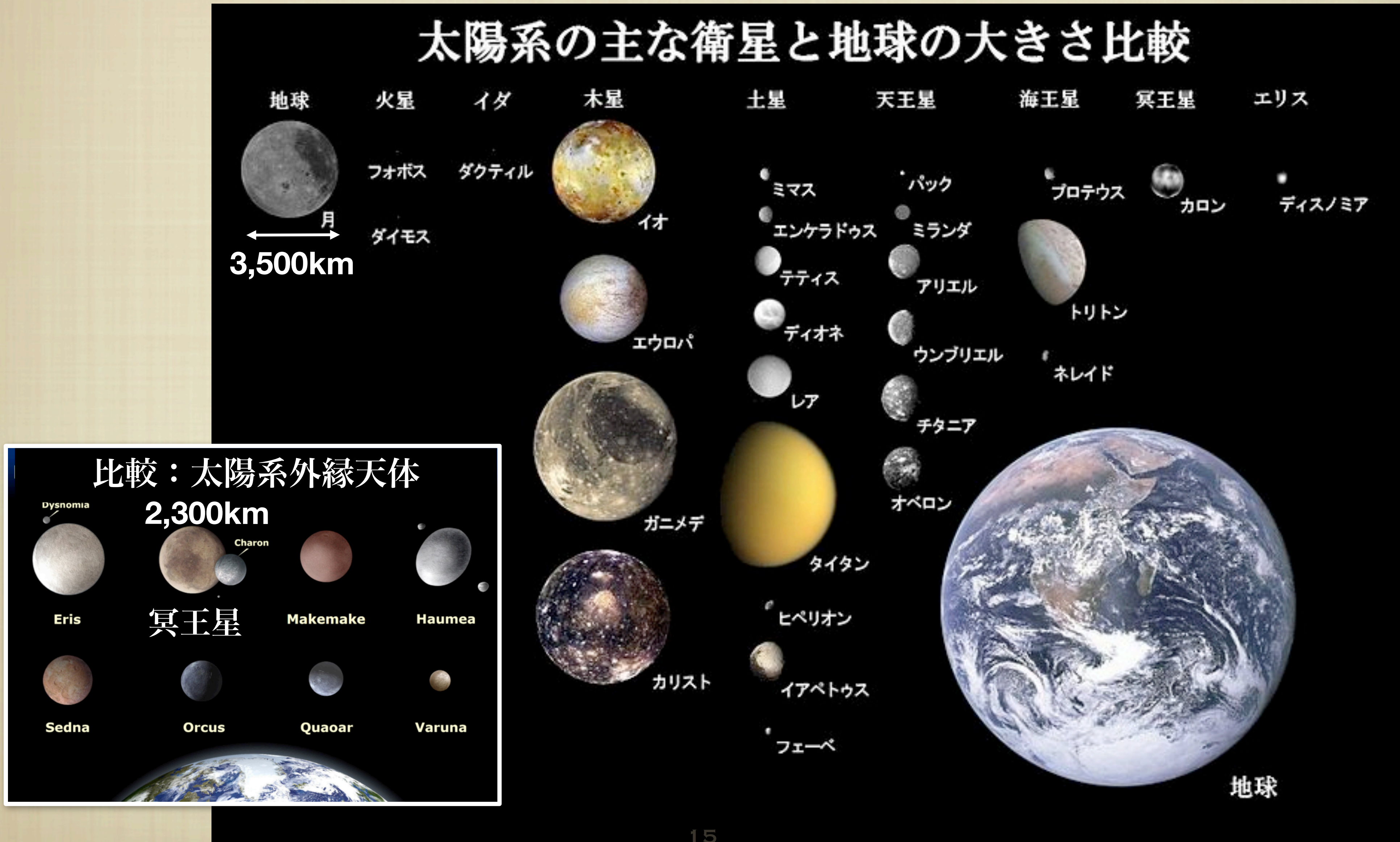
この問題の答えは最後に。
ここからは、太陽系の
お話です。

太陽系の惑星たち



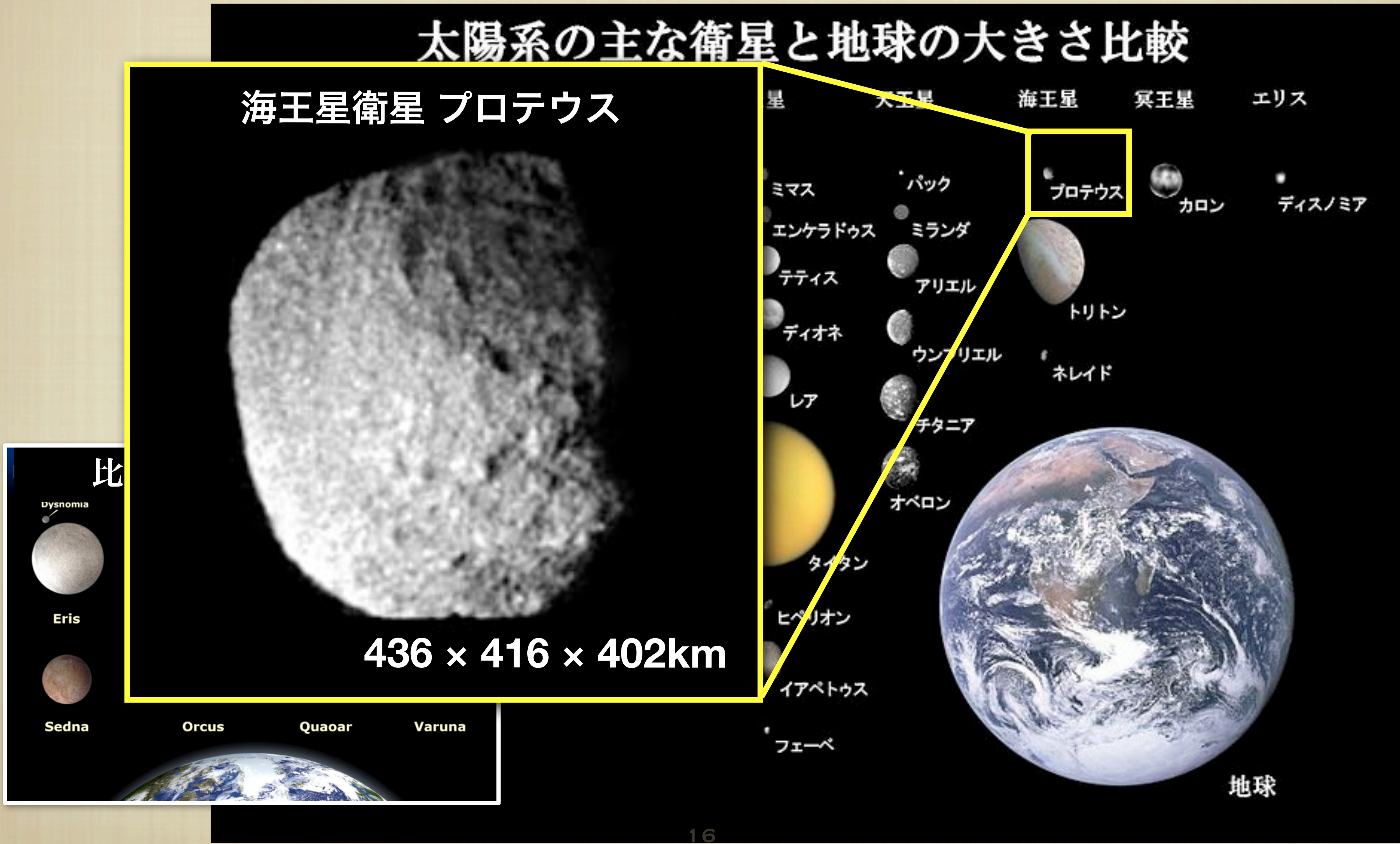
木星型惑星（水素, He）
海王星型惑星（氷）
Mercury
Venus
Earth
Mars
Jupiter
Saturn
Uranus
Neptune
"Planets"
地球型惑星（岩石, 鉄）
"Dwarf Planets"
Pluto
Makemake
Eris
4,900 km
12,100 km
12,800 km
6,800 km

衛星、太陽系外縁天体

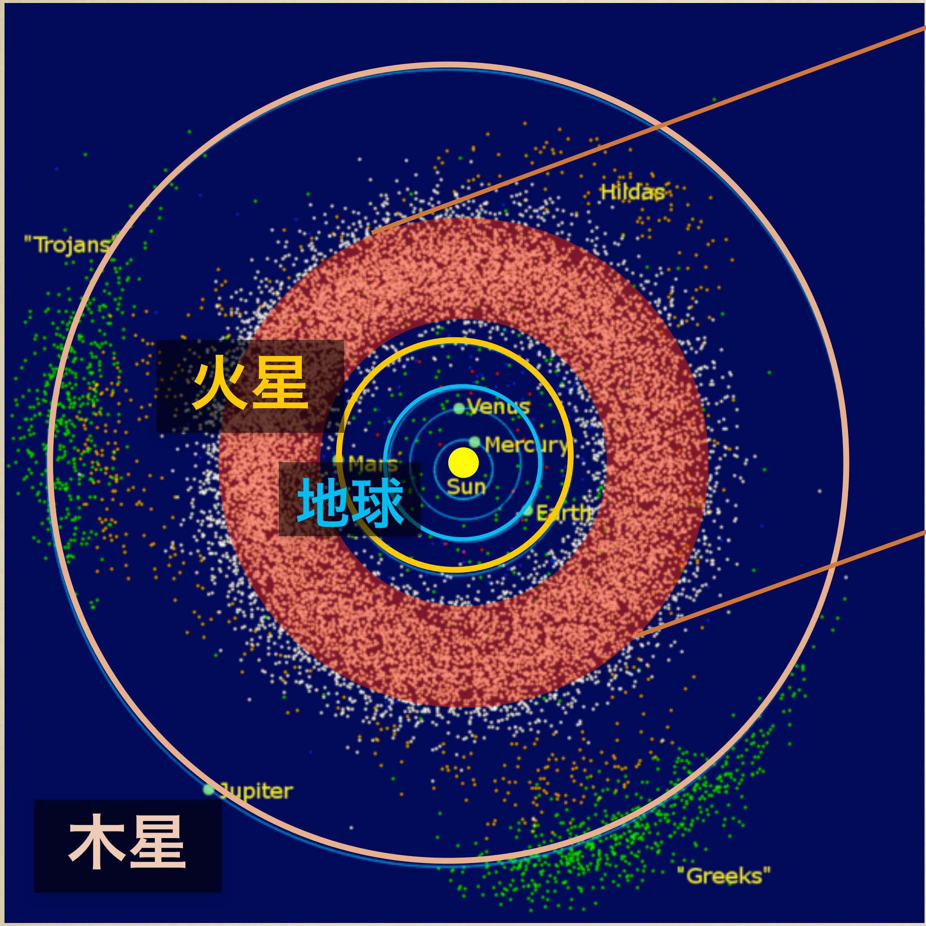


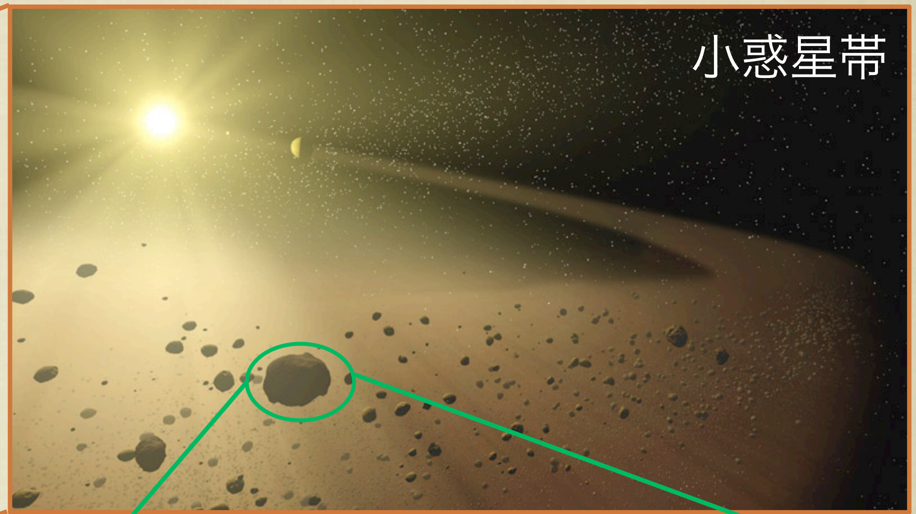
太陽系の主な衛星と地球の大きさ比較
地球
火星
イダ
木星
土星
天王星
海王星
冥王星
エリス
月
3,500km
フォボス
ダイモス
ダクティル
イオ
エウロパ
ガニメデ
カリスト
ミマス
エンケラドゥス
テティス
ディオネ
レア
タイタン
ヒペリオン
イアペトゥス
フェーベ
パック
ミランダ
アリエル
ウンブリエル
チタニア
オベロン
プロテウス
トリトン
ネレイド
カロン
ディスノミア
地球
比較：太陽系外縁天体
Dysnomia
2,300km
Charon
Eris
冥王星
Makemake
Haumea
Sedna
Orcus
Quaoar
Varuna

衛星、太陽系外縁天体


太陽系の主な衛星と地球の大きさ比較
海王星衛星 プロテウス
436 × 416 × 402km
海王星
冥王星
エリス
パック
プロテウス
カロン
ディスノミア
ミマス
エンケラドゥス
ミランダ
テティス
アリエル
トリトン
ディオネ
ネレイド
レア
チタニア
オベロン
ヒペリオン
イアペトゥス
フェーベ
地球
Dysnomia
Eris
Sedna
Orcus
Quaoar
Varuna

より小さな固体天体：小惑星

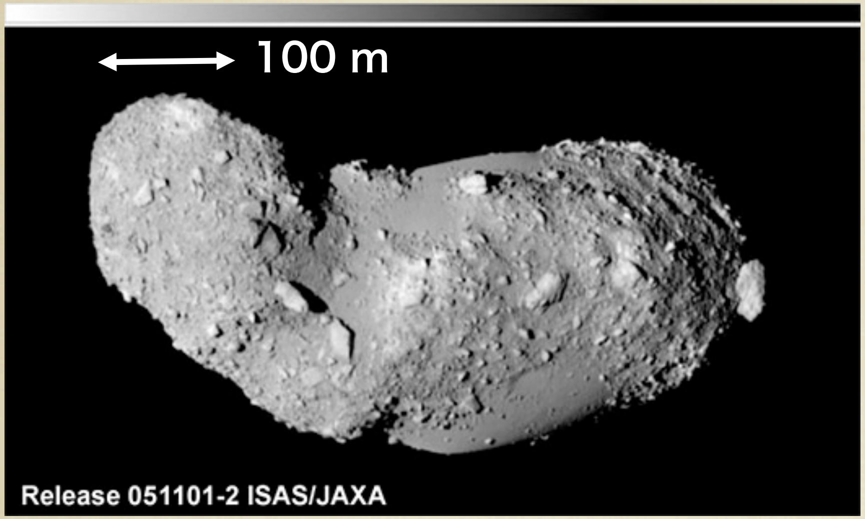




⟷ 1天文単位

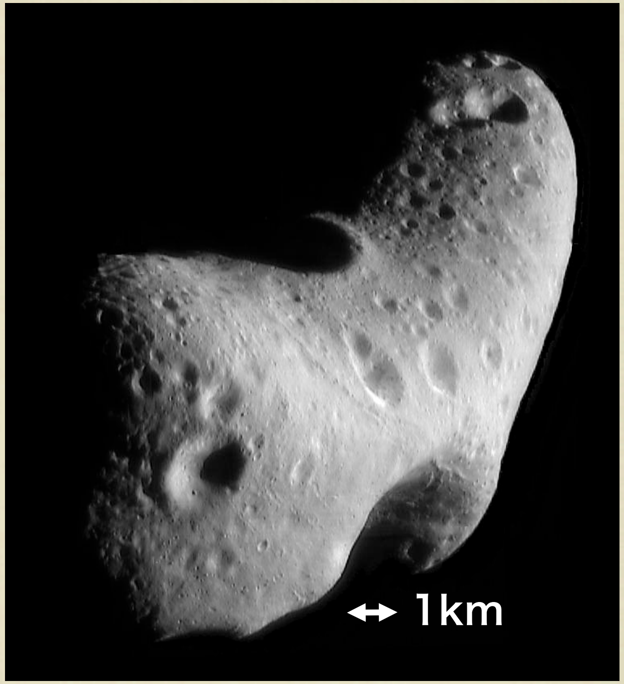
= 1億5000万km

小惑星の形



地球近傍小惑星Itokawa

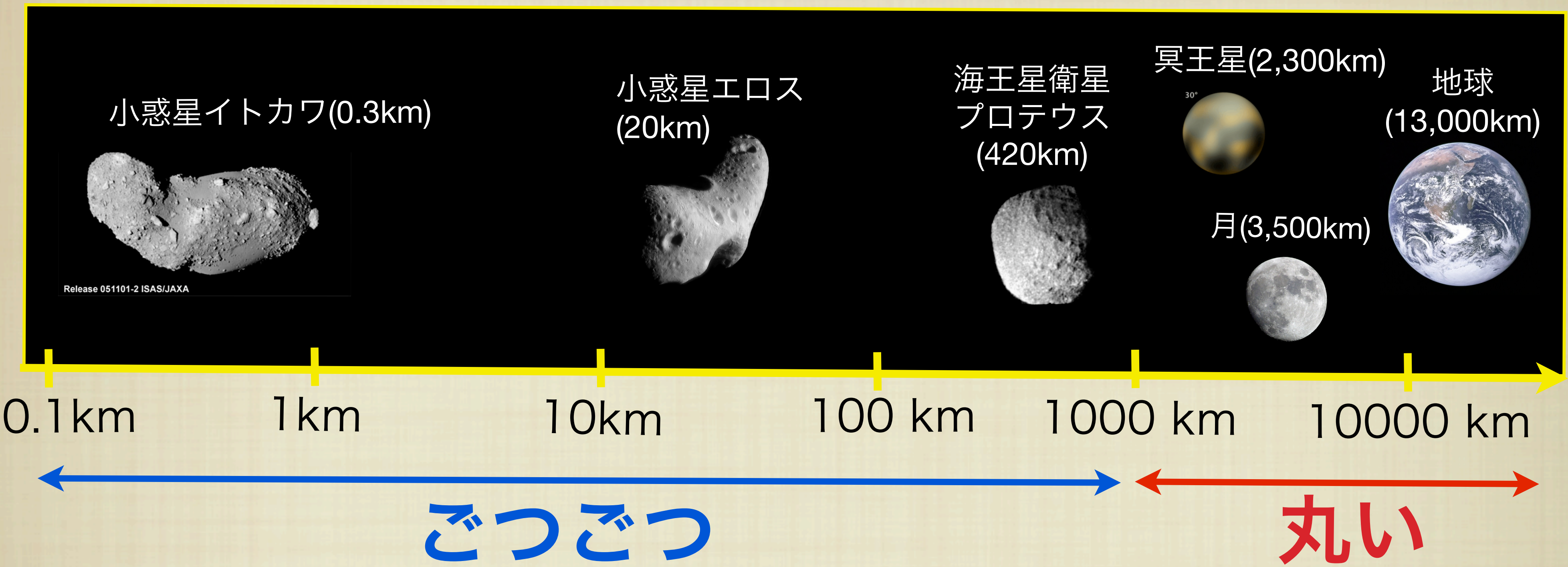
三軸径: 535 × 294 × 209 m



地球近傍小惑星Eros

三軸径: 34.4×11.2×11.2 km

太陽系の固体天体：まとめ



直径約1000kmを境に、固体天体の形が
がらりと変わるのはなぜか？

球形化の原因：自己重力

予想**「大きくなって重くなると、自分の重さでつぶれるのだろう」**

本当か？　桁見積もりしてみよう。

■ Newtonの「万有引力の法則」

「あらゆる物体の間には引力（重力）がはたらく」

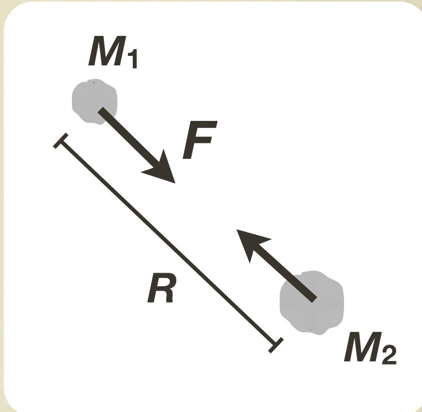
$$F = -\frac{GM_1M_2}{r^2}$$

F　：２つの物体の間にかかる力

M_1, M_2：２つの物体の質量

r　：２つの物体の距離

G　：万有引力定数



<u>物質の性質によらずに</u>、G = 6.67×10^{-11} N kg^{-2} m^{2}

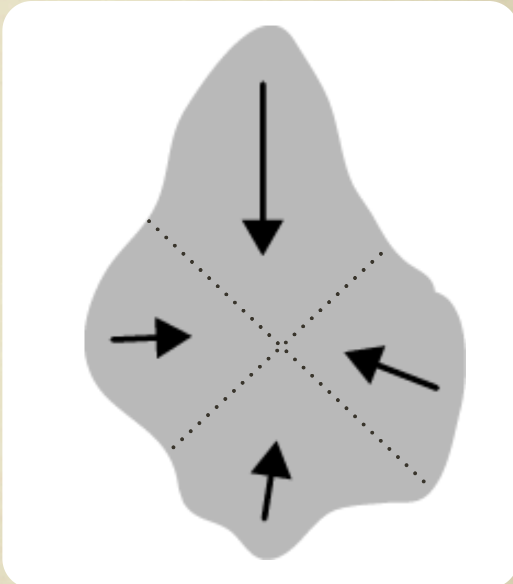
(２体がそれぞれ1kgで距離が1mなら、力はだいたい10^{-10} N)

球形化の原因：自己重力

■「自己重力」　「物体を構成する部分どうしにも引力がはたらく」

物体の質量をM、大きさをRとすると、自己重力の大きさ|F|はだいたい

$$|F| \sim \frac{GM^2}{R^2}$$



自己重力のせいで内部にかかる圧力（重圧）はだいたい

$$P \sim \frac{|F|}{R^2} \sim \frac{GM^2}{R^4}$$

$M \sim \rho R^3$ (ρ:内部密度)を使うと、重圧は次のように書ける：

$$\boxed{P \sim 0.01 \left(\frac{\rho}{3\ \mathrm{g/cc}}\right)^2 \left(\frac{R}{1\ \mathrm{km}}\right)^2 \ \text{気圧}}$$

1気圧=1013hPa

≒ 10^5 Pa

天体の自己重力の見積もり

$$P \sim 0.01\left(\frac{\rho}{3\ \mathrm{g/cc}}\right)^2\left(\frac{R}{1\ \mathrm{km}}\right)^2 \text{ 気圧}$$

ものの硬さ：剛性率

一方で、固体には硬さがある。

剛性率： 固体を変形させるのに必要な圧力。材質で決まる。

岩石の剛性率はおおよそ、

$$P_{硬} \fallingdotseq 10\ \mathrm{GPa} \fallingdotseq 10^5\ 気圧$$

(注：氷の剛性率はこれよりおよそ1桁小さい)

これより強い圧力がかかると、固体は自由に変形される

（固体の“液状化”）

固体天体の自己重力の大きさはこれより大きい？ 小さい？

天体の自己重力 vs 硬さ

0.1km　1km　10km　100 km　1000 km　10000 km

10^{-4}気圧　10^{-2}気圧　1気圧　10^{2}気圧　10^{4}気圧

自重≪硬さ

10^{6}気圧

自重≫硬さ

10^{5}気圧
(岩石の剛性率)

“桁見積もり”計算で、天体の大きさと形状の関係が説明できた！

究極の桁見積もり

ドレイク方程式 (Drake Equation, 1961)

$$N = N_* f_p n_e f_l f_i f_c L / L_g$$

N：現在、我々と電波交信が可能な 銀河系内文明の数

N_*：銀河系内の恒星の数

f_p：銀河系内の恒星が、惑星系を持つ確率

n_e：その惑星系で、生命の発生に適した環境を持つ惑星の数

f_l：その惑星上で、実際に生命が誕生する確率

f_i：その生命が、知的生命に進化する確率

f_c：その知的生命が、電波交信を試みる確率

L：そのような文明が存続する期間

L_g：銀河系の寿命

ドレイク自身の計算

N_*：銀河系内の恒星の数 … 10^{11} (=1000億個)

f_p：銀河系内の恒星が、惑星系を持つ確率 … 0.5 (=50%)

n_e：その惑星系で、生命の発生に適した環境を持つ惑星の数 … 2

f_l：その惑星上で、実際に生命が誕生する確率 … 1 (=100%)

f_i：その生命が、知的生命に進化する確率 … 0.01 (=1%)

f_c：その知的生命が、電波交信を試みる確率 … 0.01 (=1%)

L：そのような文明が存続する期間 … 10^4 年 (=1万年)

L_g：銀河系の寿命 … 10^{10} 年 (=100億年)

ドレイク方程式より、 $N = 10 \gg 1$

「銀河系には現在、我々と電波交信が可能な文明が<u>たくさん</u>存在する！！」

ドレイク方程式をどう味わうか

現時点では制限がつけられない変数が多数入っている：

n_e：１つの惑星系で、**生命の発生に適した環境を持つ惑星の数**

f_l ：そのような惑星で、**実際に生命が誕生する確率**

f_i ：その生命が、**知的生命に進化する確率**

f_c ：その知的生命が、**電波交信を試みる確率**

L ：そのような文明が**存続する期間**

ゆえに、ドレイク方程式から**「正しい」N の値**を予言することはできない。

しかし、**自分の世界観がどのような N の値を示唆するか**はわかる。
人によっては、地球外生命体の探査に対する強い動機付けになる（ドレイクもそうだった）

例：「生命を持ちうる惑星の形成と知的生命体の出現は、全ての星に付随する運命である」

→ $n_e = f_l = 1$, $f_i = 1$

「他の知的生命体との交信を望むのは、すべての知的生命体の必然である」　→ $f_c = 1$

「そのような高度な文明は、(我々がそうであるように)100年は存続する」　→ L>100年

→ あなたの世界観が正しいなら、現在あなたと交信可能な銀河系内文明の数は **N > 1000** です。
つまり、あなたはこのような文明と**実際に交信できる可能性が大**(N>>1)です。

まとめ

- **「“桁見積もり”とは何か？」**

  手持ちのデータと、なるべく少ない仮定を使って、

  知りたいものの量を見積もること。

  ただの掛け算・割り算だが、世の中の現象をおおまかに

  予測したり理解することができる。

- **応用：太陽系の固体天体の大きさと形**

  万有引力の法則と、地上で測った「ものの硬さ」

  だけから、天体の大きさと形の関係が見事に説明できた。

もう少し難しい問題

問題２

日本にカラオケボックスは

何店舗あるか？

（フェルミ問題の“現代版”）

見積もり例 (2年前に私が見積もった方法)

方針： 需要と供給の比較から導き出す！

【需要】

日本全体・1日あたりの
カラオケ屋利用者数： $n_{\text{需要}}$

- 1人がカラオケに行く頻度
  ≒ 100日に1回 = 1日に0.01回
- 日本の人口 ≒ 1億人

➡ $n_{\text{需要}}$ ≒ 100万人

【供給】

日本全体のカラオケ屋の
総収容可能人数： $n_{\text{供給}}$

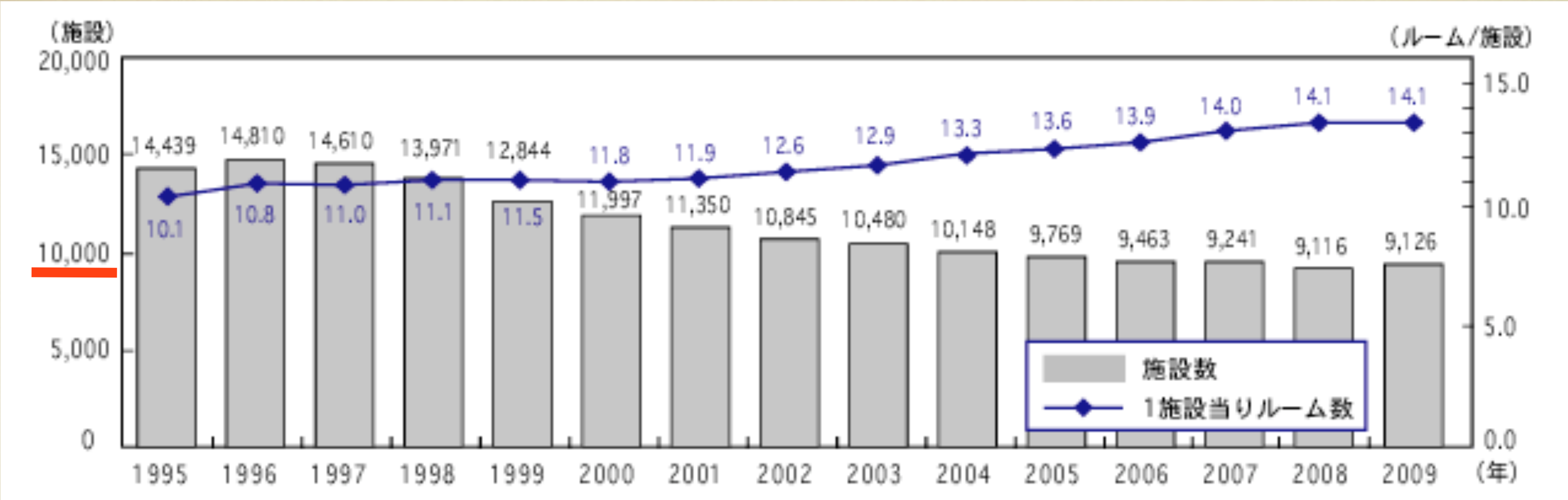
- 日本のカラオケ屋の店舗数: x
- 1店舗の収容可能人数 ≒ 100人

➡ $n_{\text{供給}}$ ≒ 100 x 人

重要と供給がマッチしているなら、店舗数 x ≒ 1万 のはず。

正解は・・・

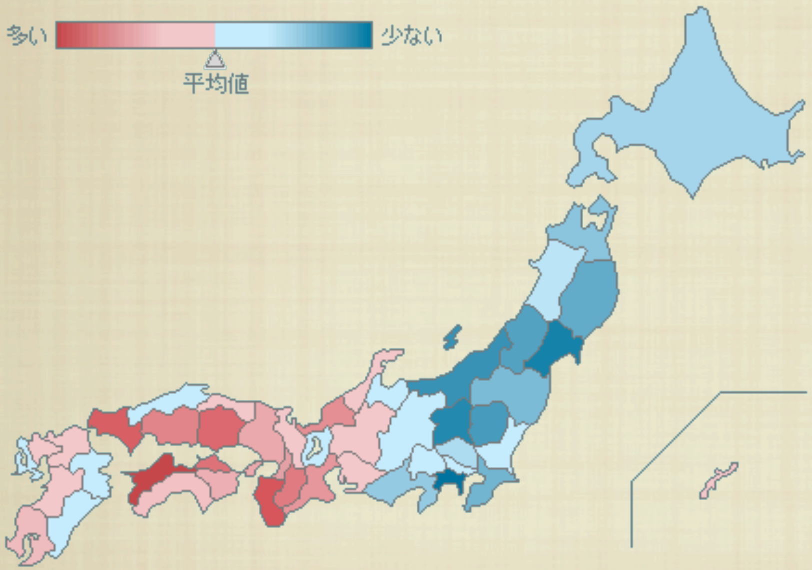
全国カラオケ事業者協会のウェブサイトにあった。



http://www.japan-karaoke.com/05hakusyo/p1.html

約１万店舗

都道府県別データもあった



	都道府県	人口	カラオケ店	10万人あたり
1	愛媛県	1477000	479	32.431
2	和歌山県	1050000	301	28.667
3	山口県	1504000	345	22.939
4	岡山県	1952000	444	22.746
5	香川県	1018000	231	22.692
6	奈良県	1431000	321	22.432
7	広島県	2878000	602	20.917
8	福井県	825000	161	19.515
9	三重県	1864000	350	18.777
10	大阪府	8814000	1649	18.709
23	京都府	2638000	327	12.396
38	青森県	1452000	114	7.851
39	福島県	2106000	157	7.455
40	千葉県	6039000	449	7.435
41	岩手県	1395000	101	7.240
42	山形県	1223000	86	7.032
43	栃木県	2013000	135	6.706
44	新潟県	2452000	153	6.240
45	群馬県	2033000	123	6.050
46	宮城県	2371000	139	5.863
47	神奈川県	8732000	499	5.715
	全国	**127687000**	**15466**	**12.112**

http://passageiro.blog54.fc2.com/blog-entry-72.html