ネイピア数の無理数性

August 6, 2022

抜群に面白い入試問題を見つけたので、紹介します。以下の入試問題を解くと、ネイピア数 e が無理数であること及び $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ であることの 2 つが分かります。大阪大学の入試問題を以下に示します。

1997 年大阪大学理系後期日程

自然数 n に対して、関数 $f_n(x) = x^n e^{1-x}$ と、その定積分 $a_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ を考える。ただし、e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。
(1) 区間 $0 \leq x \leq 1$ 上で $0 \leq f_n(x) \leq 1$ であることを示し、さらに $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ。
(2) a_1 を求めよ。$n > 1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ。
(3) 自然数 n に対して、等式

$$\frac{a_n}{n!} = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

が成り立つことを証明せよ。
(4) いかなる自然数 n に対しても、$n!e$ は整数とならないことを示せ。

(1) の解答

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= nx^{n-1}e^{1-x} + x^n e^{1-x}(-1) \\ &= x^{n-1}e^{1-x}(n-x) \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 1$ かつ n は自然数なので $f'_n(x) \geq 0$。$f_n(x)$ は単調増加なので $f_n(0) \leq f_n(x) \leq f_n(1)$ となり $0 \leq f_n(x) \leq 1$ が成立する。さらに

$$\int_0^1 0dx < \int_0^1 f_n(x)dx < \int_0^1 1dx$$

より $0 < a_n < 1$ が成立する。

(2) の解答

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^1 x e^{1-x} dx \\
&= \left[x\left(-e^{1-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1\left(-e^{1-x}\right) dx && \because \text{部分積分より} \\
&= -1 + \int_0^1 e^{1-x} dx \\
&= -1 + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 \\
&= -1 - (1-e) \\
&= e - 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \\
&= \left[x^n\left(-e^{1-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1}\left(-e^{1-x}\right) dx && \because \text{部分積分より} \\
&= -1 + n\int_0^1 x^{n-1} e^{1-x} dx \\
&= -1 + n a_{n-1}
\end{aligned}
$$

つまり $a_n = n a_{n-1} - 1$ が成立する。

(3) の解答

数学的帰納法によって証明する。$n = 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{a_1}{1!} = e - 2 \\
(\text{右辺}) &= e - \left(1 + \frac{1}{1!}\right) = e - 2
\end{aligned}
$$

よって $n = 1$ のとき成立する。次に $n = k(\geq 1)$ のとき等式が成立すると仮定する。つまり、

$$
\frac{a_k}{k!} = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right)
$$

を仮定する。すると

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{(k+1)!} &= \frac{(k+1)a_k - 1}{(k+1)!} && \because (2) \text{ の漸化式より} \\
&= \frac{a_k}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\
&= e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) - \frac{1}{(k+1)!} && \because \text{帰納法の仮定より} \\
&= e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}\right)
\end{aligned}
$$

$n = k + 1$ のときも成立する。よってすべての自然数 n に対して (3) の等式が成立する。

(4) の解答
(3) より

$$a_n = n!e - n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

が成立する。ここで $n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ は整数だが、$0 < a_n < 1$ より a_n は整数ではない。よってどんな自然数 n に対しても $n!e$ は整数ではない。

この入試問題から分かること
この入試問題から分かることは、ネイピア数 e の無理数性と $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ の 2 点です。今ネイピア数 e が有理数だと仮定すると、十分大きな自然数 n に対して、$n!e$ は整数となる。ところがこれは (4) の結果に矛盾する。したがってネイピア数 e は無理数である。(1) の結果より

$$0 < \frac{a_n}{n!} < \frac{1}{n!}$$

が成立する。これにはさみうちの原理を用いると、$n \to \infty$ のとき $\frac{a_n}{n!} \to 0$ となる。そして (3) の結果より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

つまり $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ が成立する。