

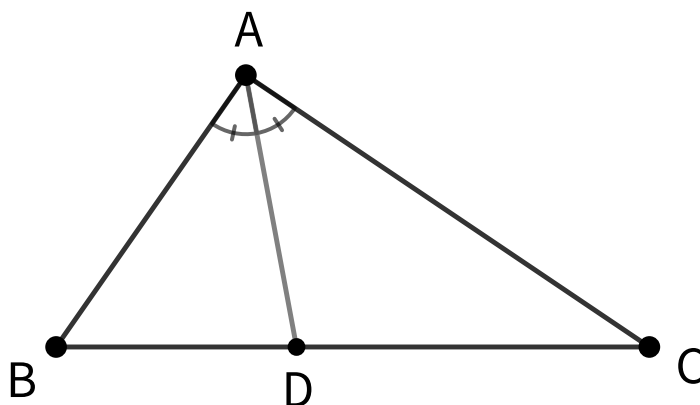
角の二等分線定理の証明

2024 年 2 月 24 日(土)

はじめに

角の二等分線定理の証明をメモしておきます. 証明は複数あるのですが、分かりやすい 3 つだけを組版 Typst で執筆しました. 他の証明が気になる人は文献[1] 及び[2] を参考にしてください.

角の二等分線定理とは



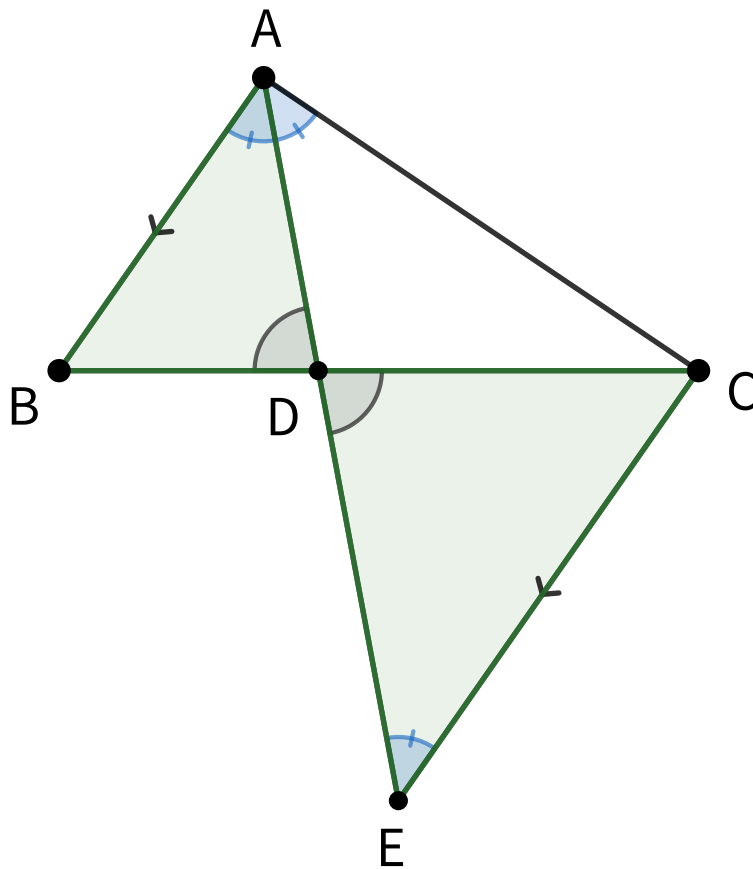
任意の三角形 ABC があり, 角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とする. このとき

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \tag{1}$$

が成立する.

証明 1

文献[3] を参考にする.



点 C を通り直線 AB に平行な直線を引く. その直線が直線 AD と交わる点を E とする. 直線 AB と直線 CE は平行なので $\angle BAD = \angle CED$ となる. これにより三角形 ACE が二等辺三角形なので $AC = CE$ となる.

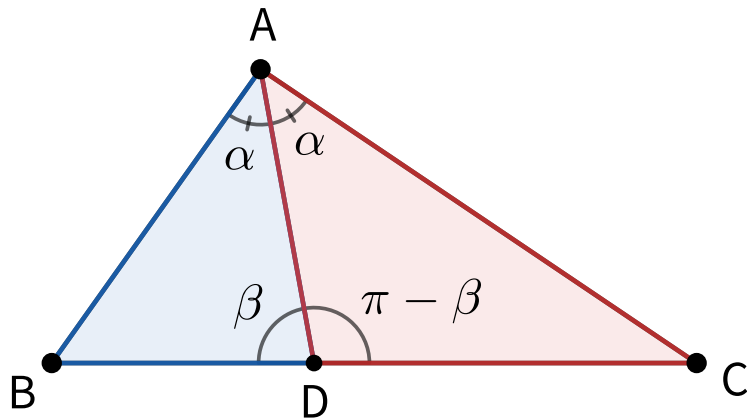
次に緑の2つの三角形は相似なので $AB : CE = BD : CD$ である. これに $AC = CE$ を合わせると,

$$AB : AC = BD : CD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

が成立する. 証明終了.

証明 2

文献[4] を参考にする.



青色の三角形に対して、正弦定理を適用すると

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (3)$$

赤色の三角形に対して、正弦定理を適用すると

$$\frac{AC}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{DC}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (4)$$

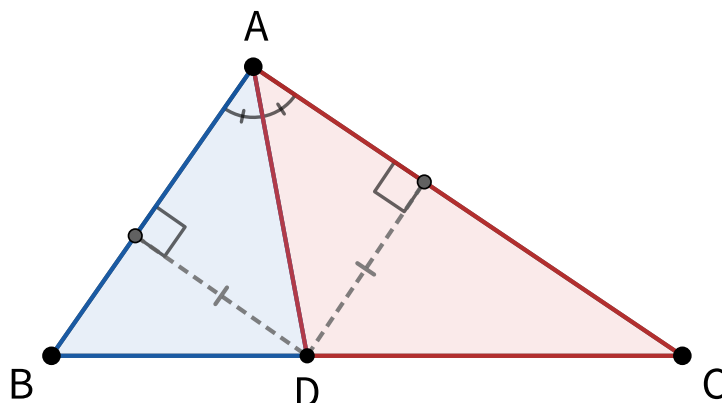
式(3)及び(4)より

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad (5)$$

が成立する. 証明終了.

証明 3

文献[1] の Proof 1 を参考にする.



青の三角形と赤の三角形は点Aから同じ高さを共有しているので,

$$\text{青の面積} : \text{赤の面積} = BD : DC \quad (6)$$

となる. 他方で点Dは辺ABと辺ACから等距離にあるので, 青の三角形と赤の三角形は点Dから同じ高さを持っている. このことより

$$\text{青の面積} : \text{赤の面積} = AB : AC \quad (7)$$

となる. 式(6)及び(7)より

$$AB : AC = BD : DC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad (8)$$

が成立する. 証明終了.

参考文献

- [1] A. Bogomolny, “Angle Bisector Theorem”. Accessed: Feb. 24, 2024. [Online]. Available: <https://www.cut-the-knot.org/triangle/AngleBisectorTheorem.shtml>
- [2] Wikipedia, “Angle bisector theorem”. Accessed: Feb. 24, 2024. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Angle_bisector_theorem
- [3] S. Sumant, “Angle bisector theorem proof -1”. Accessed: Feb. 24, 2024. [Online]. Available: <https://sumantmath.wordpress.com/2015/02/08/angle-bisector-theorem-proof/>
- [4] S. Sumant, “Angle bisector theorem proof -2”. Accessed: Feb. 24, 2024. [Online]. Available: <https://sumantmath.wordpress.com/2015/02/21/angle-bisector-theorem-proof-2/>