

高校数学でバーゼル問題を解く

2024 年 2 月 28 日(水)

はじめに

バーゼル問題

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

には様々な解法がありますが、今回は高校数学だけで証明します。

証明

文献[1] の Exercise10.2 の 26 番を参考にする。

まず各整数 $n \geq 0$ に対して

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x \, dx \quad (2)$$

と定める。

(a) 各自然数 n に対して

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \quad (3)$$

を証明する。

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^{2n-1} x \, dx \quad \because I_n \text{ の定義より} \\ &= [\sin x \cos^{2n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (2n-1) \cos^{2n-2} x (-\sin x) \, dx \quad \because \text{部分積分より} \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n-2} x \, dx \end{aligned} \quad (4)$$

そして

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n-2} x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^{2n-2} x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx \\ &= I_{n-1} - I_n \quad \because I_n \text{ の定義より} \end{aligned} \quad (5)$$

以上より式(4)と式(5)の結果を合わせると

$$I_n = (2n-1)(I_{n-1} - I_n) \Rightarrow I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \quad (6)$$

が得られる。

(b) 各自然数 n に対して

$$I_n = n(2n - 1)J_{n-1} - 2n^2 J_n \quad (7)$$

を証明する.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \cos^{2n} x \, dx \quad \because I_n \text{ の定義より} \\ &= [x \cdot \cos^{2n} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(2n) \cos^{2n-1} x (-\sin x) \, dx \quad \because \text{部分積分より} \\ &= 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^{2n-1} x \sin x \, dx \end{aligned} \quad (8)$$

そして

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^{2n-1} x \sin x \, dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \cos^{2n-1} x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} x^2 \{ (2n-1) \cos^{2n-2} x (-\sin x) \sin x + \cos^{2n-1} x \cos x \} \, dx \quad \because \text{部分積分より} \\ &= \frac{1}{2} (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n-2} x \sin^2 x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x \, dx \\ &= \frac{1}{2} (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx - \frac{1}{2} J_n \quad \because J_n \text{ の定義より} \\ &= \frac{1}{2} (2n-1) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n-2} x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x \, dx \right\} - \frac{1}{2} J_n \\ &= \frac{1}{2} (2n-1) (J_{n-1} - J_n) - \frac{1}{2} J_n \quad \because J_n \text{ の定義より} \\ &= \frac{1}{2} (2n-1) J_{n-1} - n J_n \end{aligned} \quad (9)$$

以上より式(8)と式(9)の結果を合わせると

$$\begin{aligned} I_n &= 2n \left(\frac{1}{2} (2n-1) J_{n-1} - n J_n \right) \\ &= n(2n-1) J_{n-1} - 2n^2 J_n \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる.

(c) 各自然数 n に対して

$$\frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \frac{J_n}{I_n} \right) \quad (11)$$

を証明する. (b)の両辺を I_n で割ると

$$1 = n(2n-1) \frac{J_{n-1}}{I_n} - 2n^2 \frac{J_n}{I_n} \quad (12)$$

これに(a)の結果を用いると

$$\begin{aligned} 1 &= n(2n-1) \frac{J_{n-1}}{\frac{2n-1}{2n} I_{n-1}} - 2n^2 \frac{J_n}{I_n} \\ &= 2n^2 \frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - 2n^2 \frac{J_n}{I_n} \end{aligned} \quad (13)$$

つまり

$$\frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \frac{J_n}{I_n} \right) \quad (14)$$

が得られる.

(d) 各自然数 N に対して

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 2 \frac{J_N}{I_N} \quad (15)$$

を証明する. $n = 1, 2, \dots, N$ に対して(c)の結果を合計すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} &= 2 \sum_{n=1}^N \left(\frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \frac{J_n}{I_n} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_1}{I_1} \right) + \left(\frac{J_1}{I_1} - \frac{J_2}{I_2} \right) + \left(\frac{J_2}{I_2} - \frac{J_3}{I_3} \right) + \left(\frac{J_3}{I_3} - \frac{J_4}{I_4} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{J_{N-2}}{I_{N-2}} - \frac{J_{N-1}}{I_{N-1}} \right) + \left(\frac{J_{N-1}}{I_{N-1}} - \frac{J_N}{I_N} \right) \right\} \\ &= 2 \left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_N}{I_N} \right) \quad \because \text{隣り合う 2 項が相殺するため} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24} \quad (18)$$

式(17)及び式(18)の結果を式(16)に代入すると

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{\frac{1}{24} \pi^3}{\frac{\pi}{2}} - \frac{J_N}{I_N} \right) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \frac{J_N}{I_N} \quad (19)$$

が得られる.

(e) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で

$$x \leq \frac{\pi}{2} \sin x \quad (20)$$

を証明する. そのためには $f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - x$ とおいて, $f(x)$ が $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で常に0以上であることを示せばよい. ここで

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos x - 1 = \frac{\pi}{2} \left(\cos x - \frac{2}{\pi} \right) \quad (21)$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\cos x = \frac{2}{\pi}$ を満たす x は存在してかつ一意である. その x を x_0 と名付ける. すると関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる.

x	0		x_0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$	0	↗	+	↘	0

この増減表により $f(x)$ は $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で常に0以上であることが分かる.

(f) 各自然数 N に対して,

$$0 \leq \frac{J_N}{I_N} \leq \frac{\pi^2}{8N+1} \quad (22)$$

を証明する.

$$\begin{aligned}
J_N &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2N} x \, dx \quad \because J_n \text{ の定義より} \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \sin x \right)^2 \cos^{2N} x \, dx \quad \because (e) \text{ の結果より} \\
&= \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2N} x \, dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} (I_N - I_{N+1}) \quad \because \text{式(5)の結果より} \\
&= \frac{\pi^2}{4} \left(I_N - \frac{2(N+1)-1}{2(N+1)} I_N \right) \quad \because (a) \text{ の結果より} \\
&= \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{2(N+1)} I_N \right) \\
&= \frac{\pi^2}{8(N+1)} I_N
\end{aligned} \quad (23)$$

以上より, I_N と J_N はともに正なので

$$0 \leq \frac{J_N}{I_N} \leq \frac{\pi^2}{8(N+1)} \quad (24)$$

が得られる.

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (25)$$

を証明する. $N \rightarrow \infty$ のとき $\frac{\pi^2}{8(N+1)} \rightarrow 0$ となる. これを(f)に適用すると挟みうちの原理より, $N \rightarrow \infty$ のとき $\frac{J_N}{I_N} \rightarrow 0$ となる. 更にこの結果を(d)に適用してやると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (26)$$

が得られる. 証明終了.

参考文献

- [1] D. Velleman, Calculus: A Rigorous First Course. in Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017.